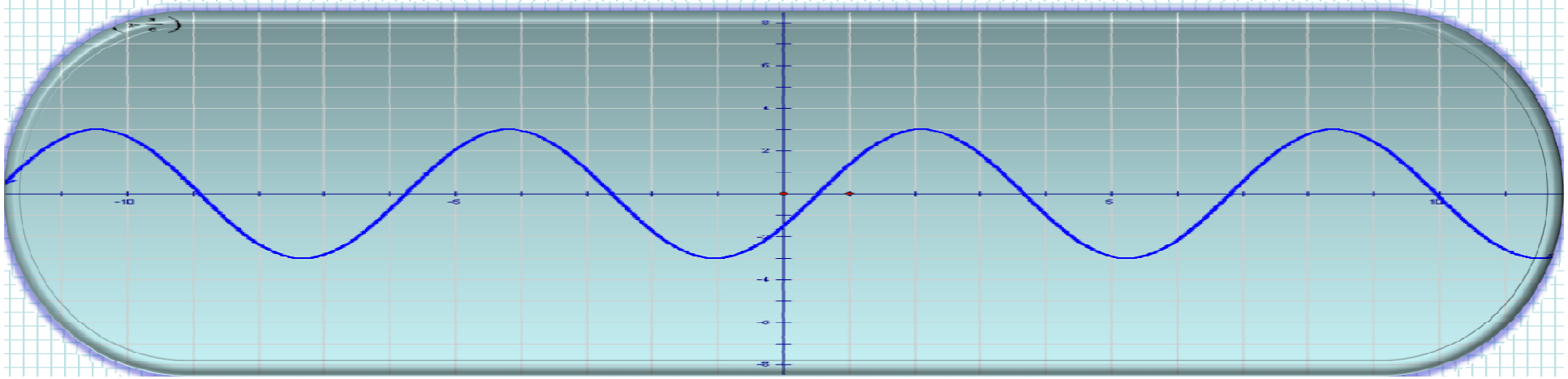
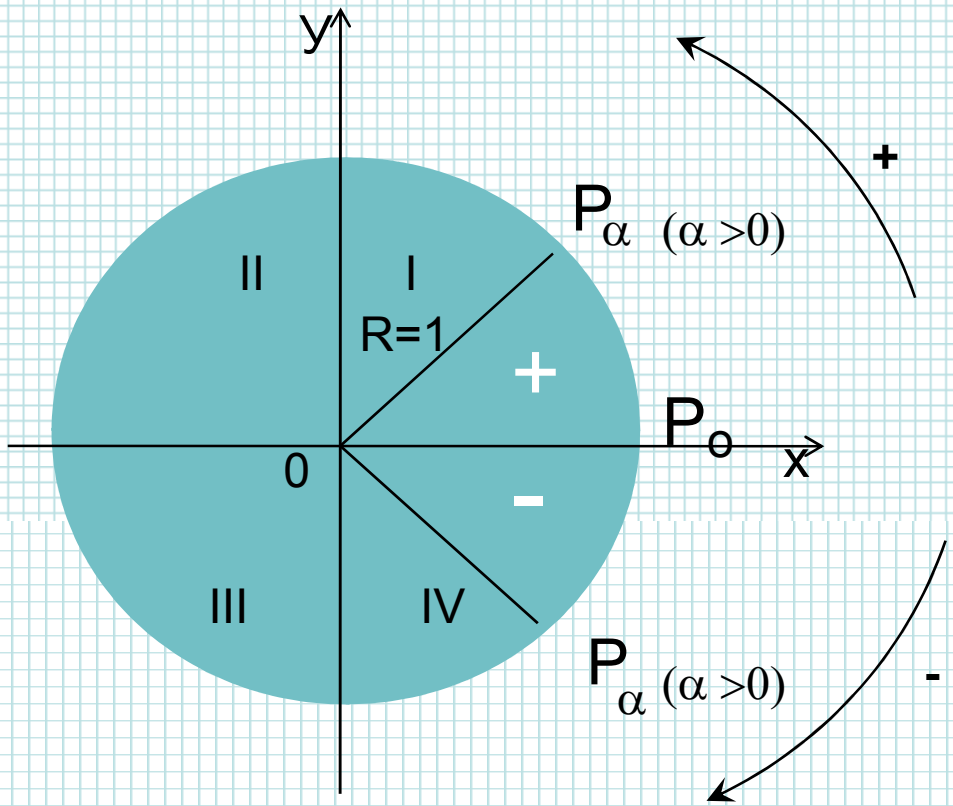
Тригонометрия на ЕГЭ

.

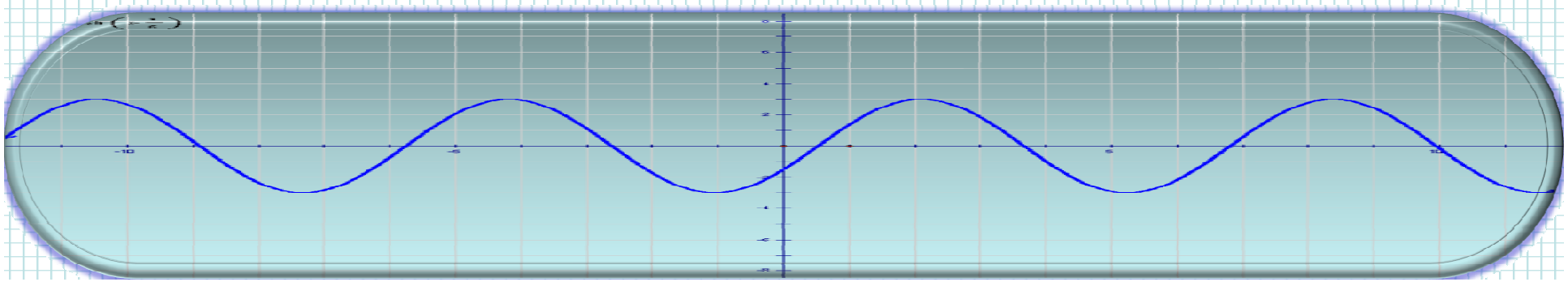


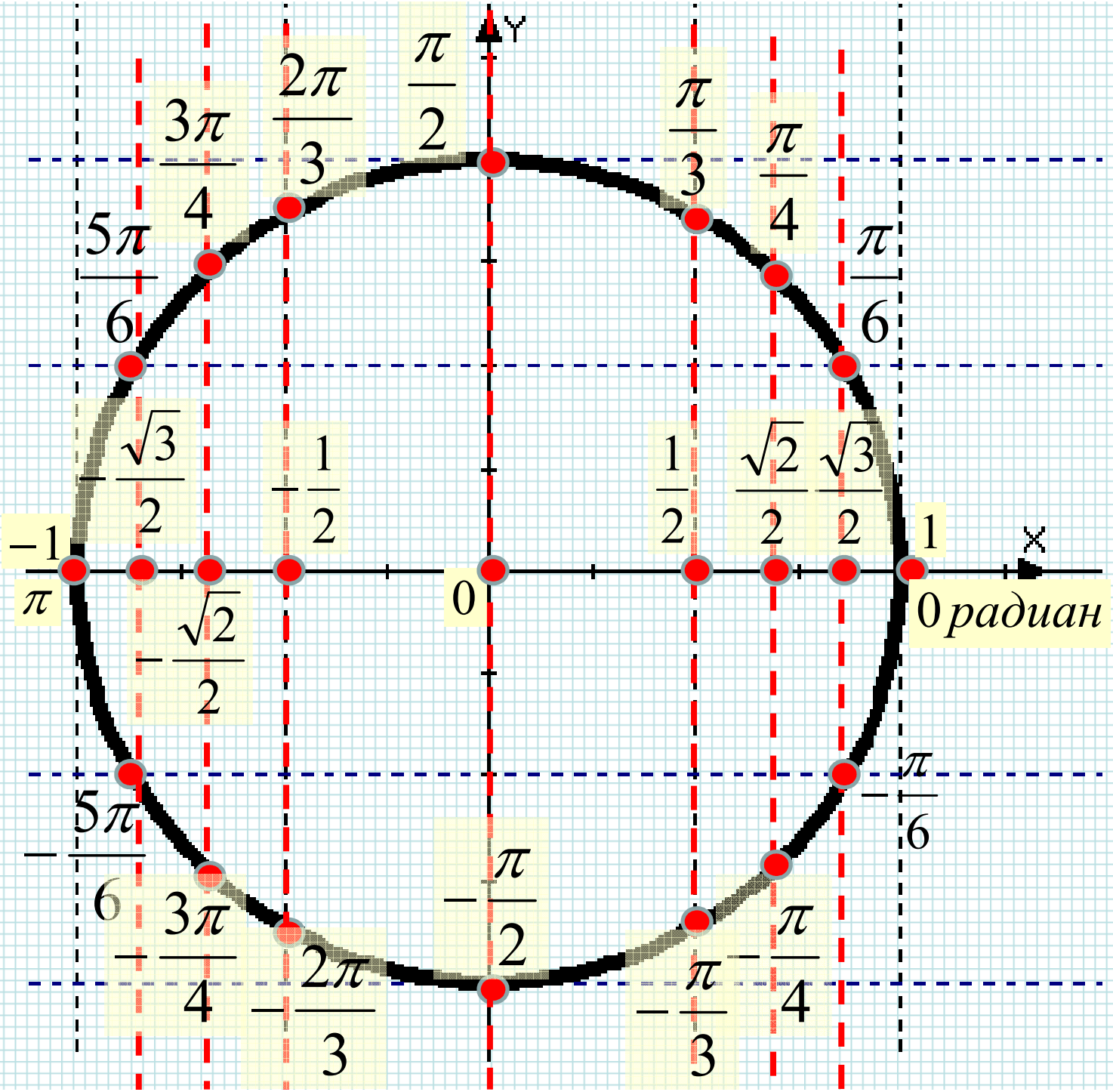
Угол поворота



Начало отсчета углов - в точке (1;0)

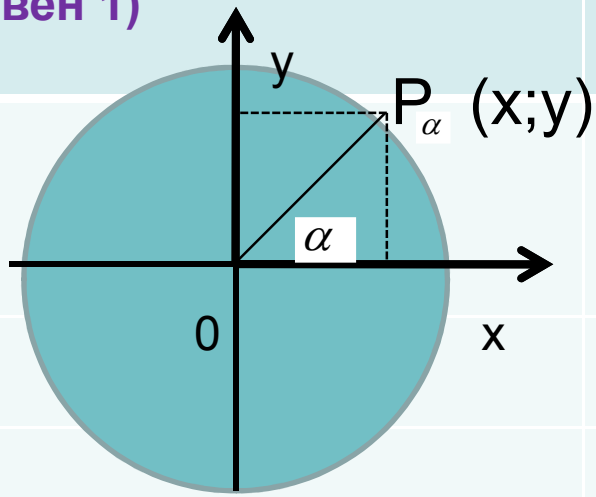
Угол поворота радиуса OP_o против часовой стрелки считается ***положительным***, а по часовой --- ***отрицательным***




Y
X
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
-1
π
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
0
1
0 радиан
$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{4}$

Определение тригонометрических функций

Через единичную окружность (радиус равен 1)



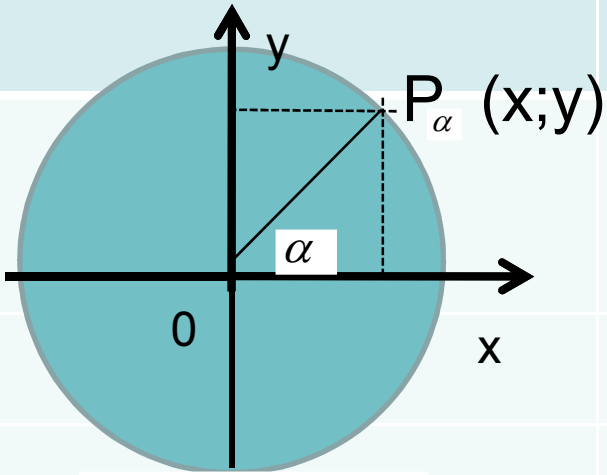
Sin α - ордината точки P

Cos α x - абсцисса точки P

$$tg\,\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Через произвольную окружность



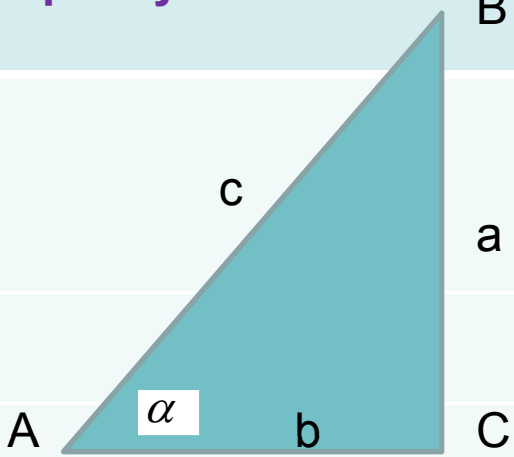
$$\sin\alpha = \frac{y}{R}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}$$

$$tg\,\alpha = \frac{y}{x}$$

$$ctg\,\alpha = \frac{x}{y}$$

Через прямоугольный треугольник (для острых углов

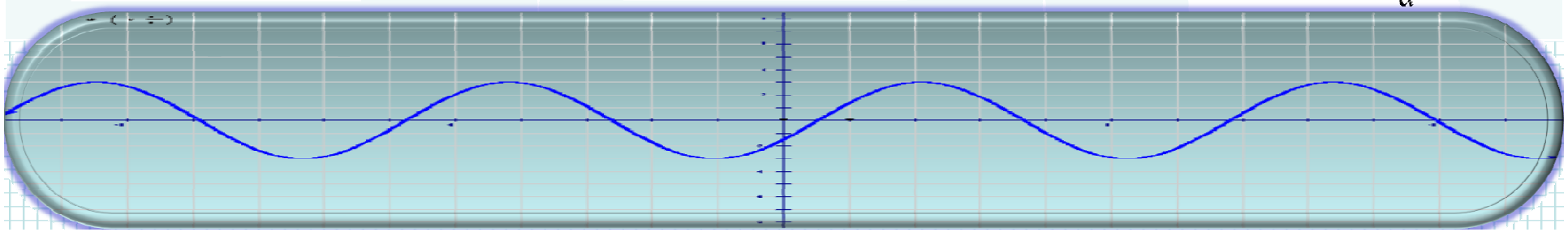


$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

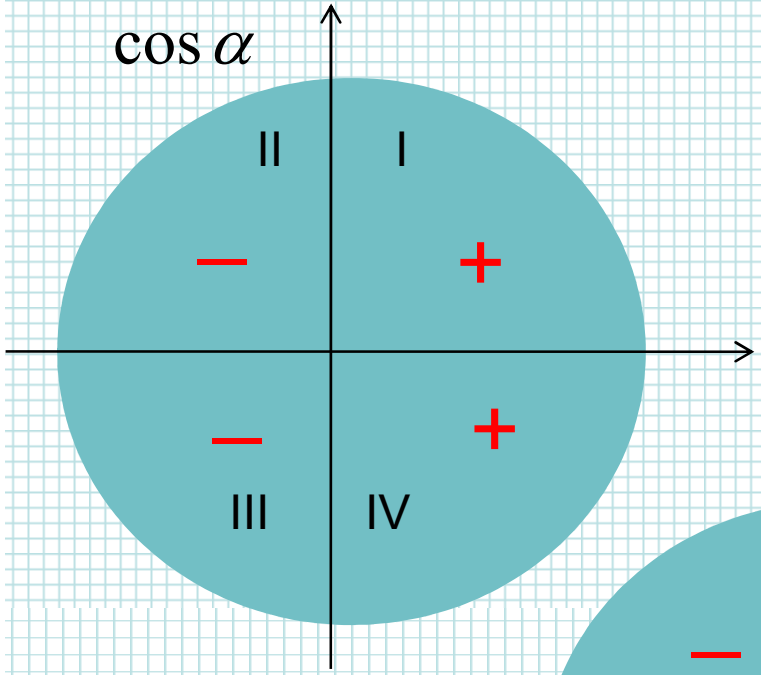
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

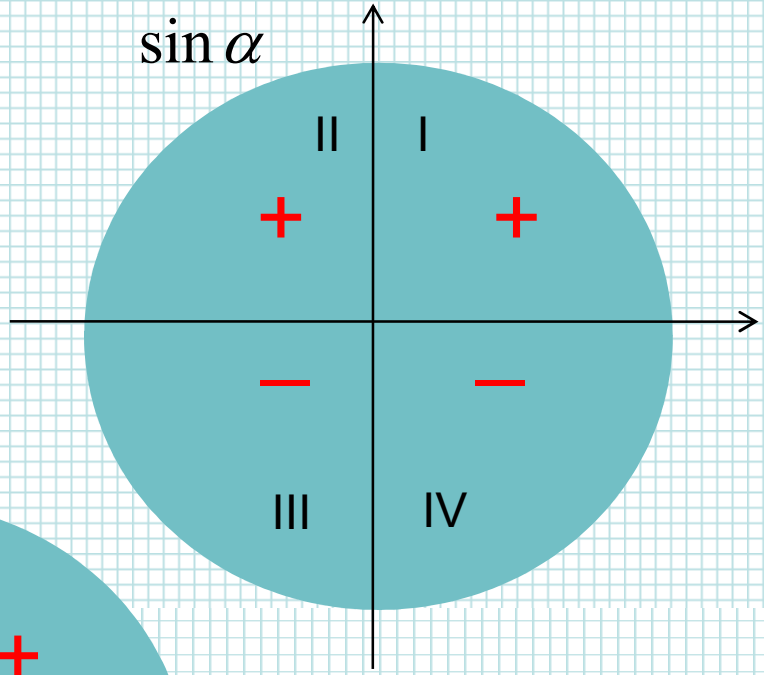
$$tg\,\alpha = \frac{a}{b}$$

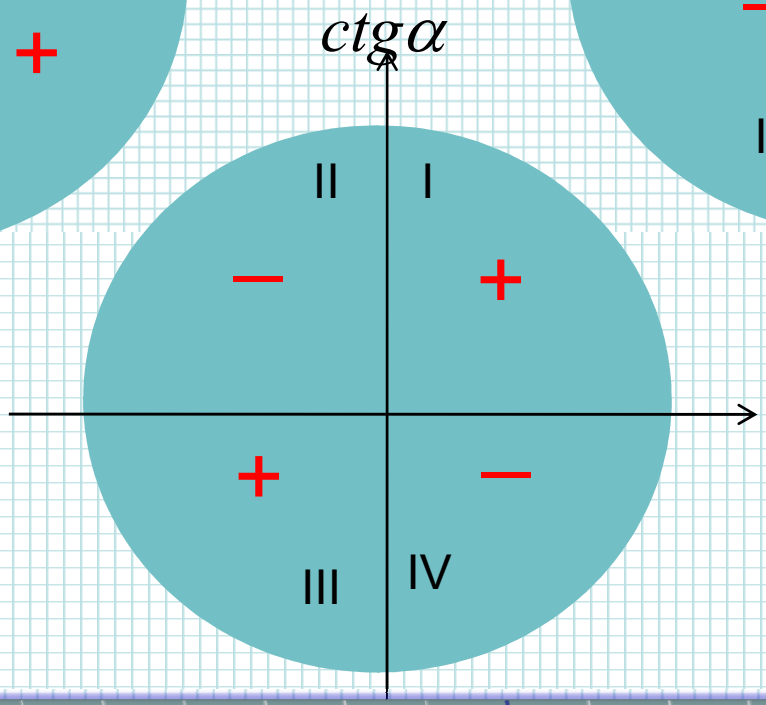
$$ctg\,\alpha = \frac{b}{a}$$

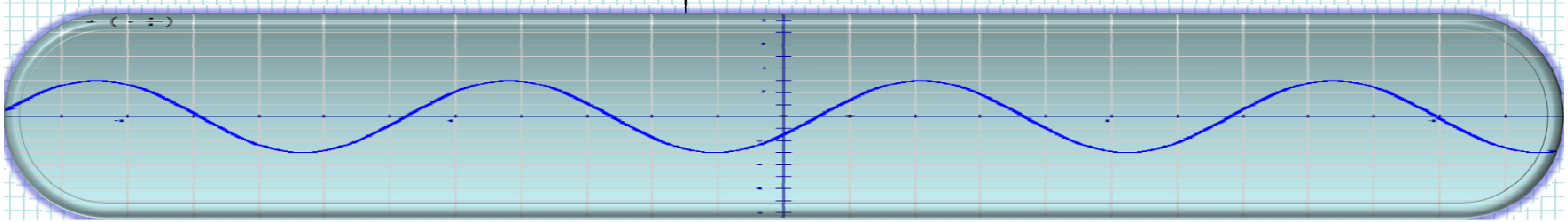


Знаки тригонометрических функций

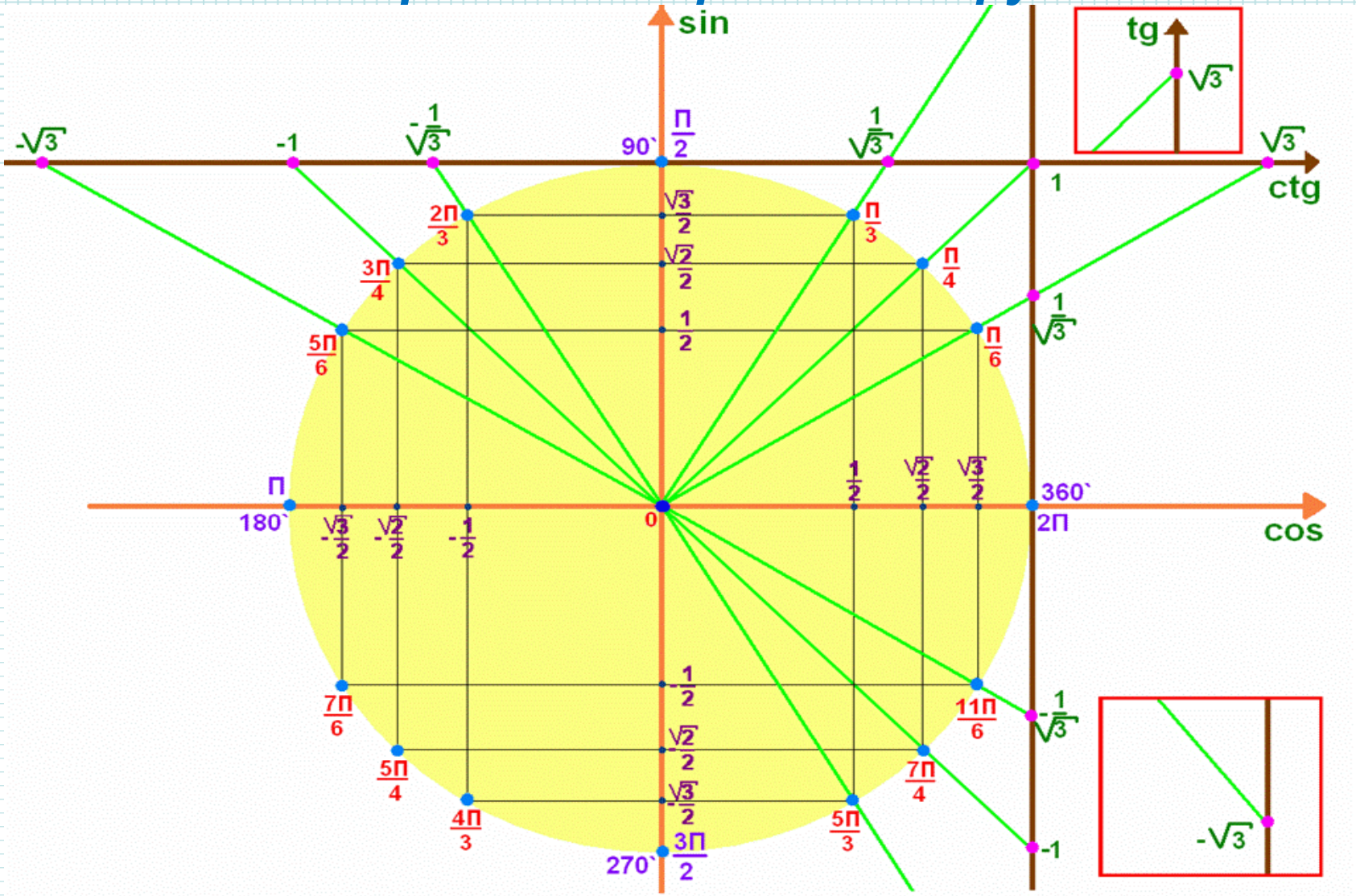


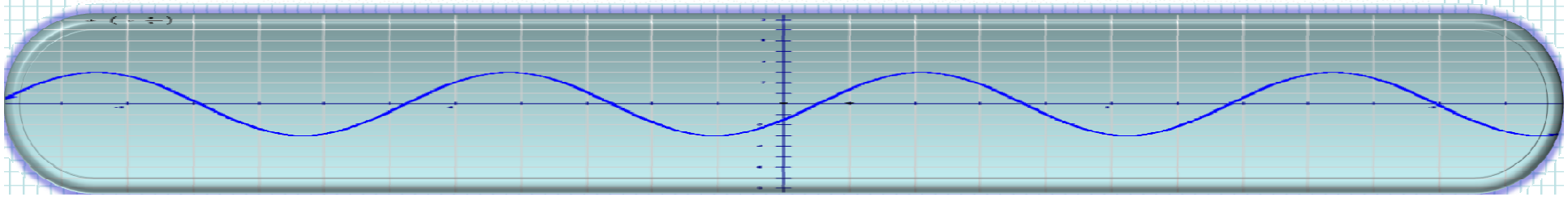






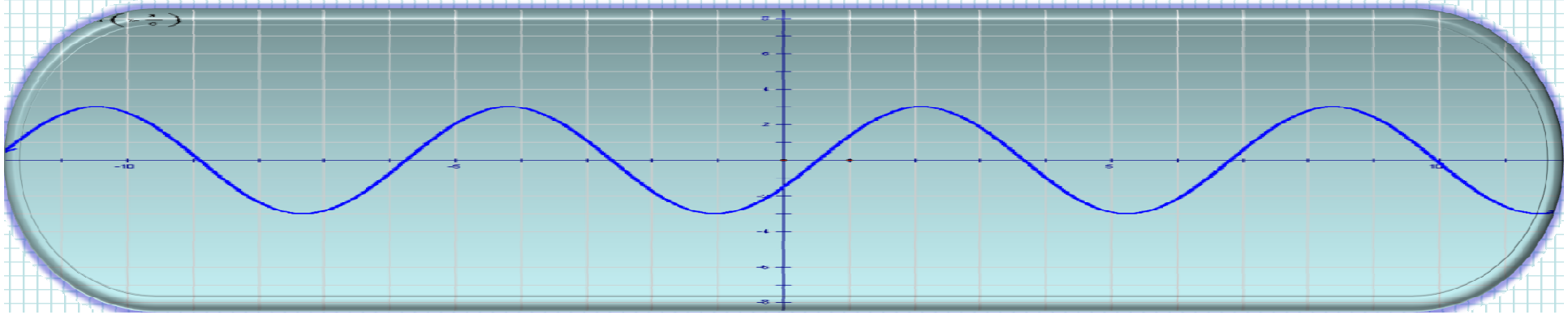
Тригонометрический круг





Значения тригонометрических функций некоторых углов

Функция	Значения									
	0	0^0	$\frac{\pi}{6}$	30^0	$\frac{\pi}{4}$	45^0	$\frac{\pi}{3}$	60^0	$\frac{\pi}{2}$	90^0
$\cos x$	1		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1}{2}$		0	
$\sin x$	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1	
$tg x$	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$\sqrt{3}$		-	
$ctg x$	-		$\sqrt{3}$		1		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		0	



Основные формулы тригонометрии

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\alpha \neq \pi n, n \in Z$$

$$tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} n, n \in Z$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

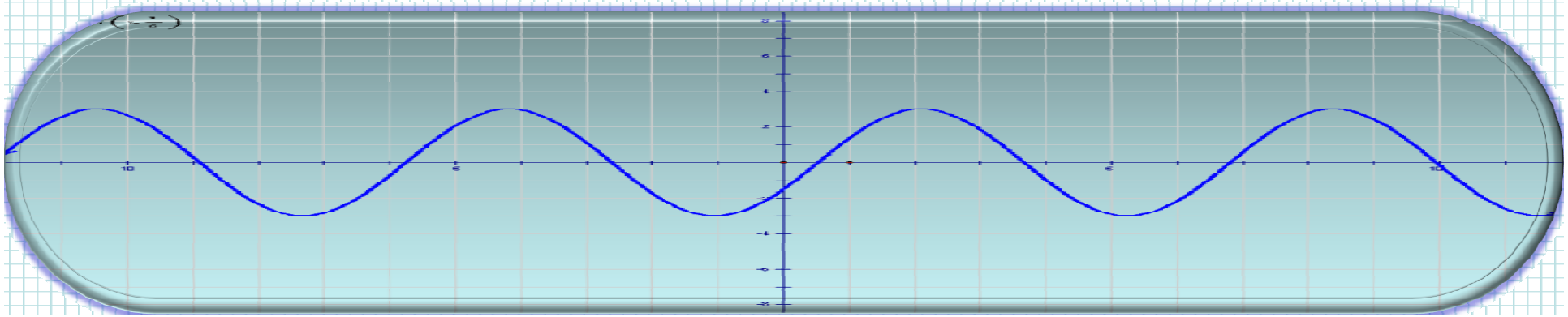
$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\alpha \neq \pi n, n \in Z$$



$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

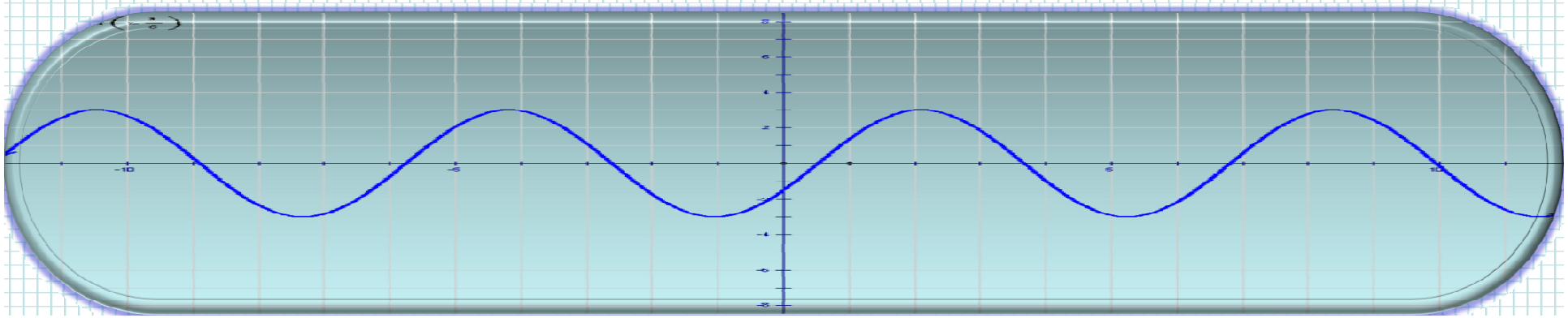
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

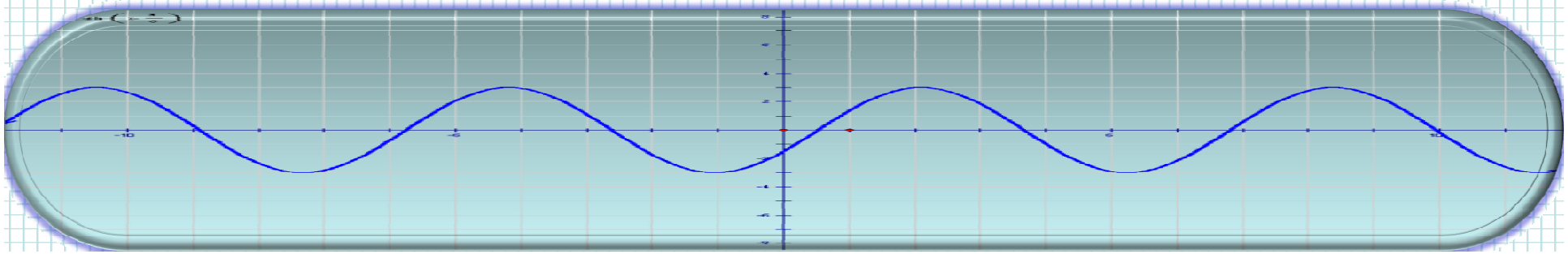


Формулы приведения

Аргумент t Приводимая функция	π/2+t	π +t	3/2π+t	2π-t
sint	cost	+sint	-cost	-sint
cost	+sint	-cost	+sint	cost
tgt	+ctgt	+tgt	+ctgt	-tgt
ctgt	+tgt	+ctgt	+tgt	-ctgt

мнемоническое правило:

- ***Если аргумент изменяется на угол, кратный π, название функции не меняется.***
- ***Если аргумент изменяется на угол , кратный $\pi/2$, название функции меняется на противоположное.***
- ***Знак новой функции определяется знаком исходной, считая , что $\alpha \in (0, \pi/2)$.***



Формулы решения уравнений sinx =a, cosx = a, tg x=a.

$$1.\sin x = a, где\ a \in [-1;1];$$

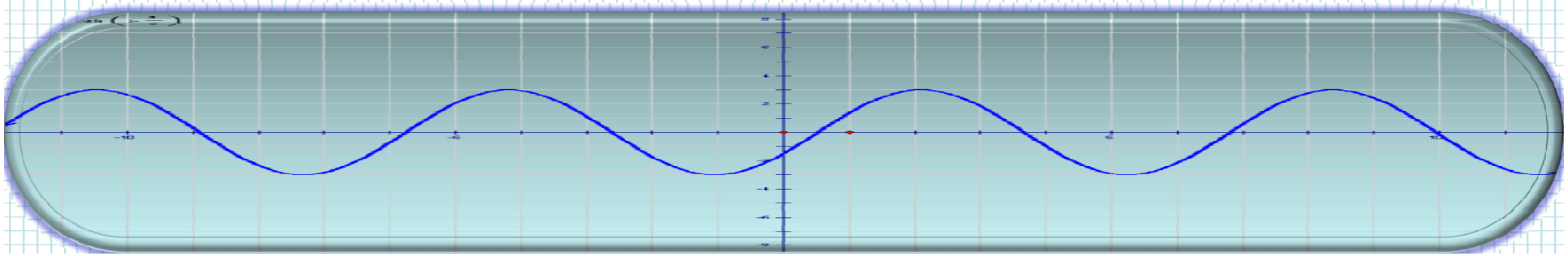
$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$$

$$2.\cos x = a, где\ a \in [-1;1]$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$$

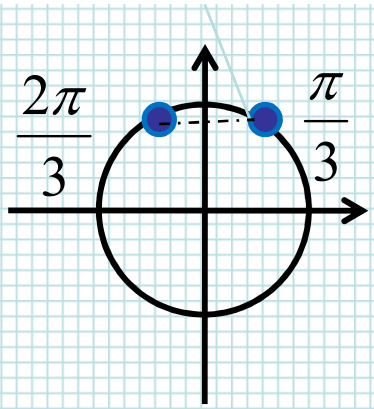
$$3.tgx = a, где\ a \in R$$

$$x = arctga + \pi k, k \in Z$$



Задание 5

Решите уравнение $\sin\frac{\pi(8x-7)}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Решение

$$\frac{\pi(8x-7)}{3}=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;$$

$$\frac{8x-7}{3}=\frac{1}{3}+2n,\ n\in Z;$$

$$8x-7=1+6n,\ n\in Z;$$

$$x=1+\frac{3}{4}n,\ n\in Z;$$

$$n=-2,\ x=-0{,}5;$$

$$\frac{\pi(8x-7)}{3}=\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;\quad \Big|:\pi$$

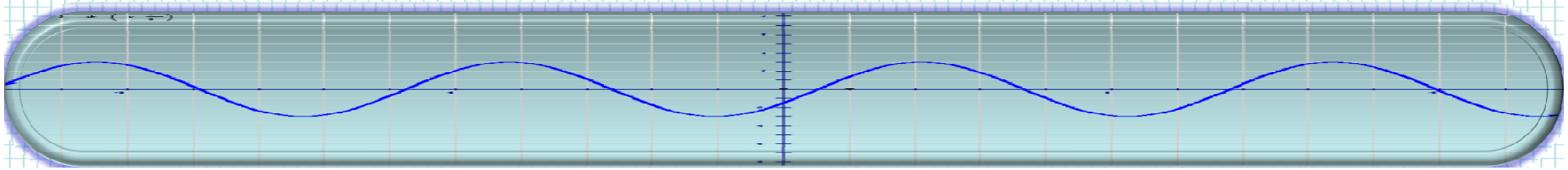
$$\frac{8x-7}{3}=\frac{2}{3}+2n,\ n\in Z;\ \Big|\times 3$$

$$8x-7=2+6n,\ n\in Z;$$

$$x=\frac{9}{8}+\frac{6}{8}n,\ n\in Z;$$

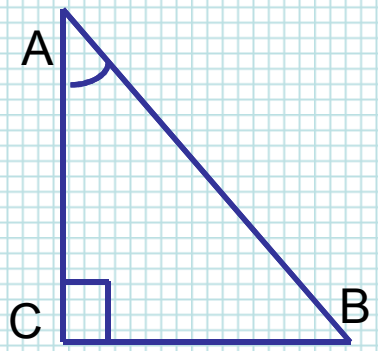
$$n=-2,\quad x=-\frac{3}{8}=-0{,}375\,.$$

Ответ : $-0{,}375$.



Задание 6

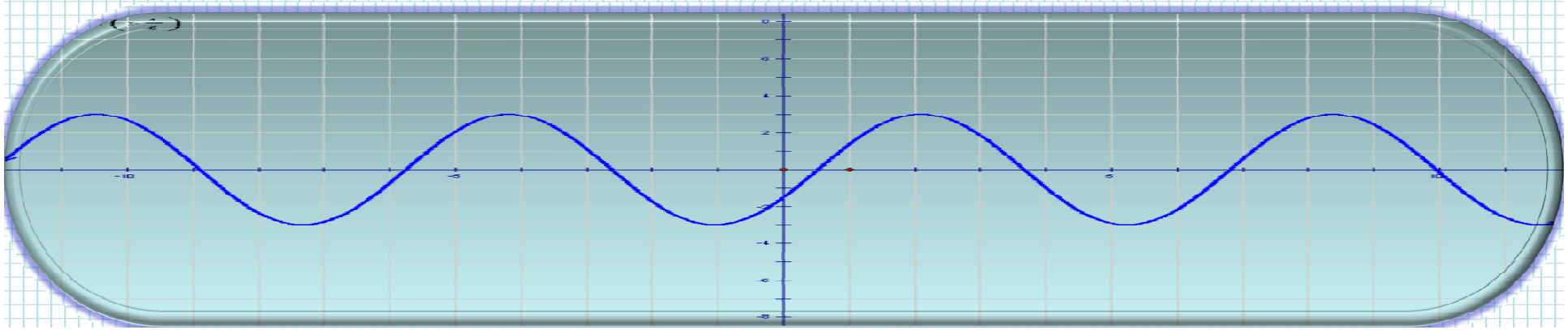
В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, *AB=25,AC=20*.
Найдите *sinA* .



Решение.

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{AB} = \frac{\sqrt{625-400}}{25} = \frac{15}{25} = 0{,}6$$

Ответ : 0,6.



Задание 9

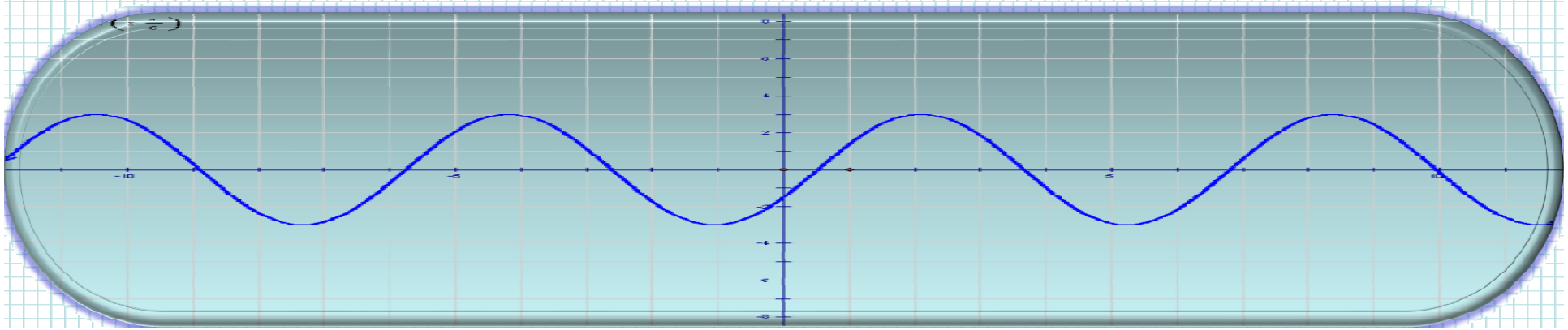
Найдите значение выражения $\sqrt{12}\cos^2\frac{5\pi}{12}-\sqrt{3}$.

Решение.

$$\sqrt{12}\cos^2\frac{5\pi}{12}-\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(\sqrt{4}\cos^2\frac{5\pi}{12}-1\right)=\sqrt{3}\left(2\cos^2\frac{5\pi}{12}-1\right)=$$

$$=\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6}=\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1{,}5.$$

Ответ: $-1{,}5$.



Задание 9

Найдите $\dfrac{10\cos\alpha + 4\sin\alpha + 15}{2\sin\alpha + 5\cos\alpha + 3}$, *если* $tg\alpha = -2{,}5$.

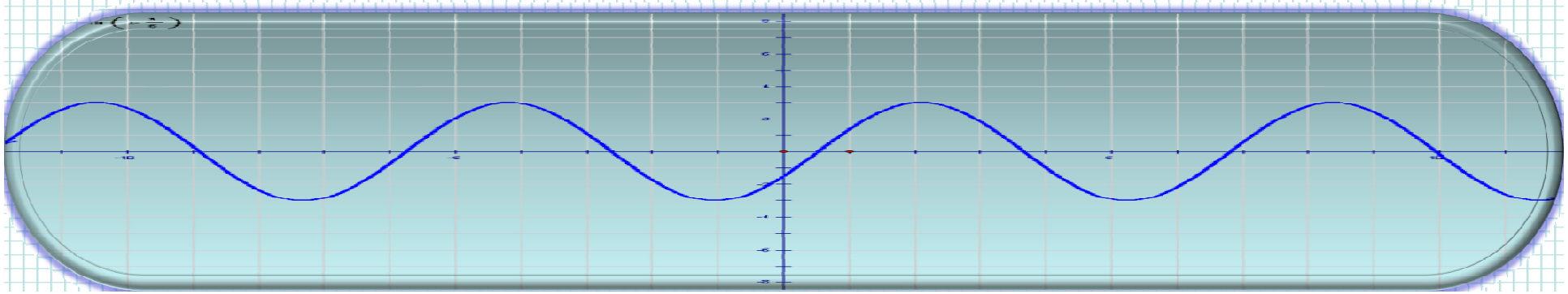
Решение.

Если $tg\alpha = -2{,}5$, *то* $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -2{,}5$, *значит*, $\sin\alpha = -2{,}5\cos\alpha$.

Получим: $\dfrac{10\cos\alpha + 4(-2{,}5\cos\alpha) + 15}{2(-2{,}5\cos\alpha) + 5\cos\alpha + 3} = \dfrac{10\cos\alpha - 10\cos\alpha + 15}{-5\cos\alpha + 5\cos\alpha + 3} =$

$= \dfrac{15}{3} = 5.$

Ответ: 5.



Тригонометрия на ЕГЭ Задания В10

Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине со скоростью, меняющейся по закону $v(t) = 0{,}5\sin \pi t$, где t — время в секундах. Кинетическая энергия груза, измеряемая в джоулях, вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$,

где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Определите, какую долю времени из первой секунды после начала движения кинетическая

энергия груза будет не менее $5 \cdot 10^{-3}$ Дж. Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Решение.

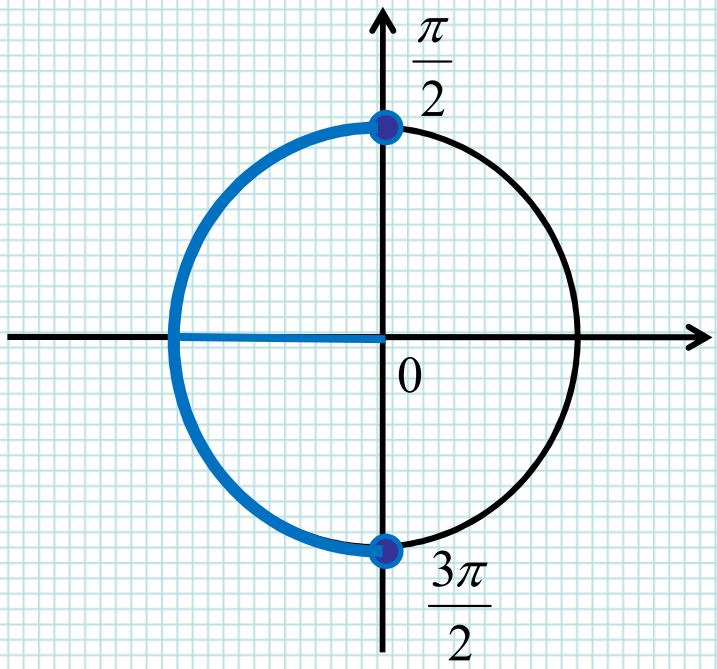
$$E \geq 5 \cdot 10^{-3}; \qquad \frac{mv^2}{2} \geq 5 \cdot 10^{-3}; \qquad \frac{m(0{,}5\sin \pi t)^2}{2} \geq 5 \cdot 10^{-3}.$$

Поличим неравенство: $\frac{0{,}08(0{,}5\sin \pi t)^2}{2} \geq 5 \cdot 10^{-3}.$

$$\frac{0{,}08(0{,}5\sin\pi t)^2}{2} \geq 5\cdot 10^{-3}; \Big|\times 2 \qquad 0{,}08\cdot 0{,}25\sin^2\pi t \geq 10^{-2}; \Big|\times 100$$

$$8\cdot 0{,}25\sin^2\pi t \geq 1; \qquad 2\sin^2\pi t \geq 1; \qquad 2\sin^2\pi t - 1 \geq 0;$$

$$-\cos 2\pi t \geq 0; \qquad \cos 2\pi t \leq 0.$$



Так как необходимо найти долю времени из первой секунды после начала движения, то имеем:

$$\frac{\pi}{2} \leq 2\pi t \leq \frac{3\pi}{2}; \Big|:2\pi; \qquad \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}.$$

Значит, $\Delta t = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ *сек.*

Получим: $\frac{0{,}5}{1} = 0{,}5.$

Ответ: 0,5.

Задание B12

Найдите точку минимума функции $y=(0{,}5-x)\cos x+\sin x$,

принадлежащую промежутку $(0;\ \frac{\pi}{2})$.

Решение

$y=(0{,}5-x)\cos x+\sin x,\quad D(y)=R.$

$y'=(0{,}5-x)'\cos x+(0{,}5-x)(\cos x)'+\cos x=-\cos x-(0{,}5-x)\sin x+\cos x=$

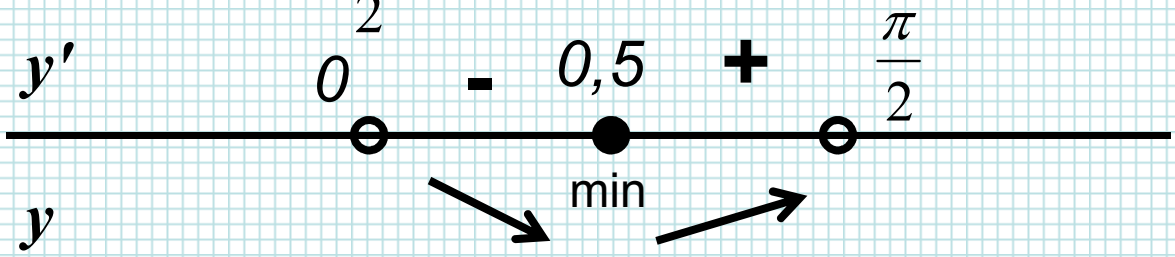
$=(x-0{,}5)\sin x.\quad y'=0,\quad$ *если* $\quad (x-0{,}5)\sin x=0.$

$x-0{,}5=0$ *или* $\sin x=0$ *решений на промежутке*

$x=0{,}5\in(0;\ \frac{\pi}{2})$ $\quad (0;\ \frac{\pi}{2})$ *нет.*

$x_{\min}=0{,}5.$

Ответ: 0,5.



Задачи группы В. Задания В14

Найдите наибольшее значение функции $y=-2tgx+4x-\pi-3$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$.

Решение.

$y=-2tgx+4x-\pi-3,\qquad D(y):\cos x\neq 0.\qquad y'=\frac{-2}{\cos^2 x}+4.$

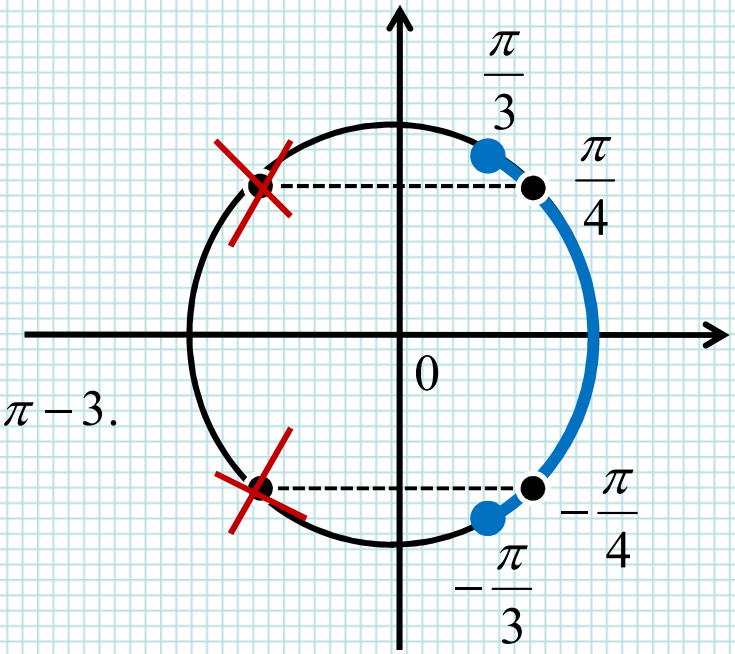
$y'=0,\quad$ *если* $\quad \frac{-2}{\cos^2 x}+4=0;\qquad \cos^2 x=\frac{1}{2};$

$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad$ *или* $\qquad \cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$tg\left(\frac{\pi}{4}\right)=-5;\qquad tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1-2\pi;$

$tg\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}-\pi-3;\quad tg\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}-\pi-3.$

Ответ: $-5.$



1. Алгебраический метод.
(метод замены переменной и подстановки).

Пример : $2\cos^2(x+\frac{\pi}{6})-3\sin(\frac{\pi}{3}-x)+1=0$

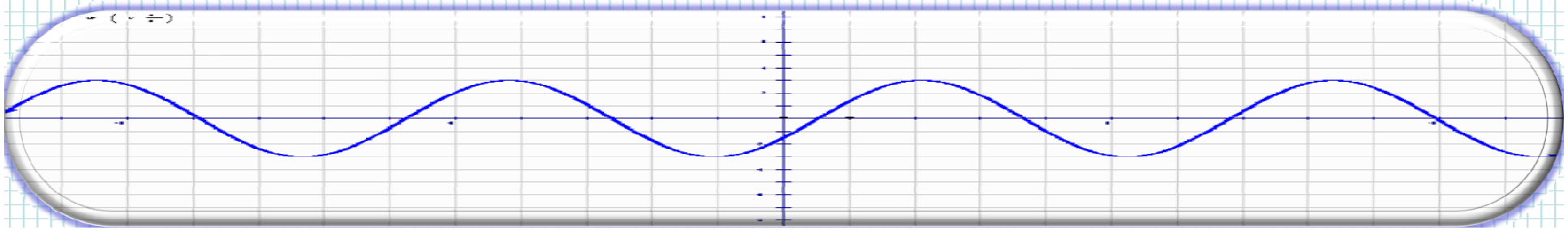
Решение : $\sin(\frac{\pi}{3}-x)=\cos(x+\frac{\pi}{6}).\cos(x+\frac{\pi}{6})=y;2y^2-3y+1=0;$

$y_1=1;\ y_2=\frac{1}{2}.$

$\cos(x+\frac{\pi}{6})=1;\ x+\frac{\pi}{6}=2\pi n,\ n\in Z;\ x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z.$

$\cos(x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2};\ x+\frac{\pi}{6}=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi k,\ k\in Z;\ x=\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z.$

Ответ : $-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ n\in Z,\ k\in Z.$



2. Разложение на множители.

Пример. Решить уравнение: $(\cos x)^2 + \sin x \cdot \cos x = 1$

Решение

$$\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - 1 = 0; \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x = 0;$$

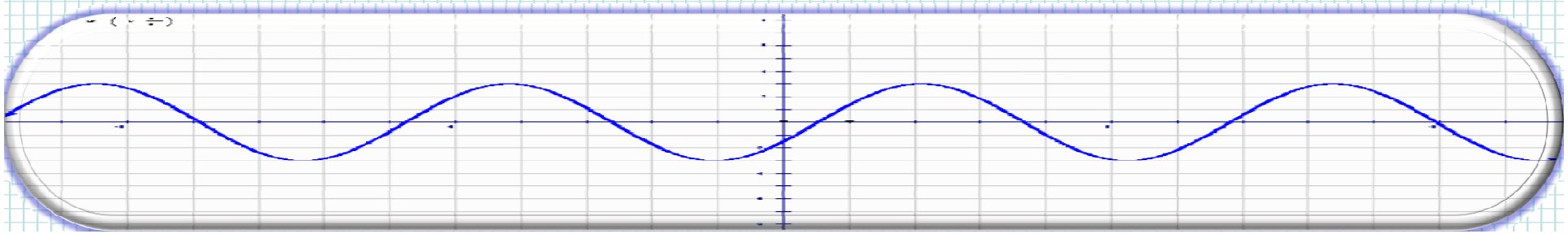
$$\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0; \sin x(\cos x - \sin x) = 0;$$

$$\sin x = 0 \qquad \cos x - \sin x = 0 \,|\div \cos x \neq 0$$

$$x = \pi n, n \in Z \qquad \mathrm{tg}x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

$$Ответ: \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi k, n \in Z, k \in Z.$$



3. Приведение к однородному уравнению.

Уравнение называется однородным относительно sin и cos, если все его члены одной и той же степени относительно sin и cos одного и того же угла. Чтобы решить однородное уравнение, надо:

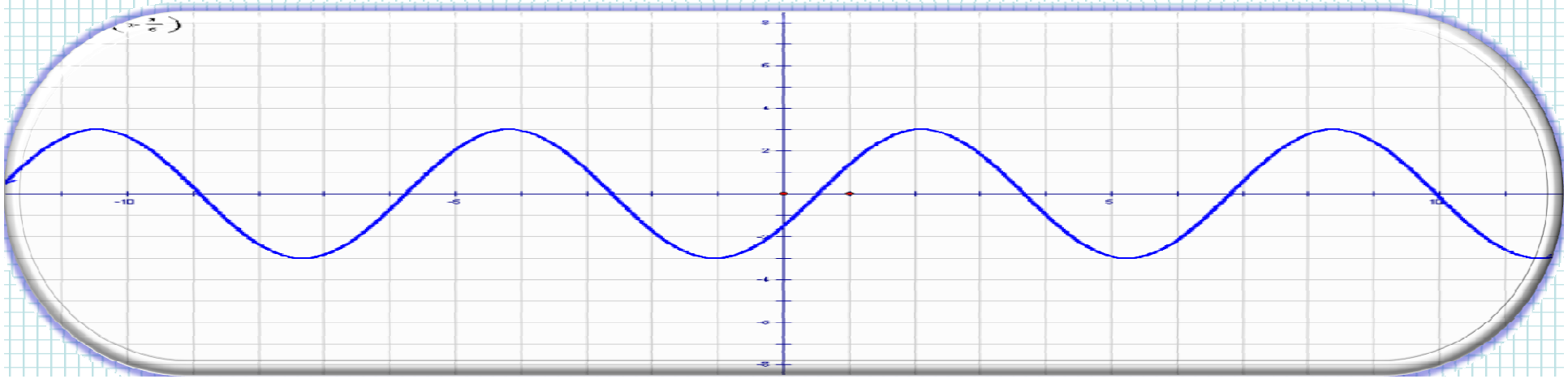
а) перенести все его члены в левую часть;

б) вынести все общие множители за скобки;

в) приравнять все множители и скобки нулю;

г) скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на cos (или sin) в старшей степени;

д) решить полученное алгебраическое уравнение относительно tg



4. Введение вспомогательного угла

Решить уравнение $\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = 1$.

Решение .Уравнение вида $a\sin x + b\cos x = c$.

В данном уравнении $a = \sqrt{3}; b = -1$, поэтому делим обе части на $\sqrt{3+1} = 2$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\cos 3x = \frac{1}{2}$$

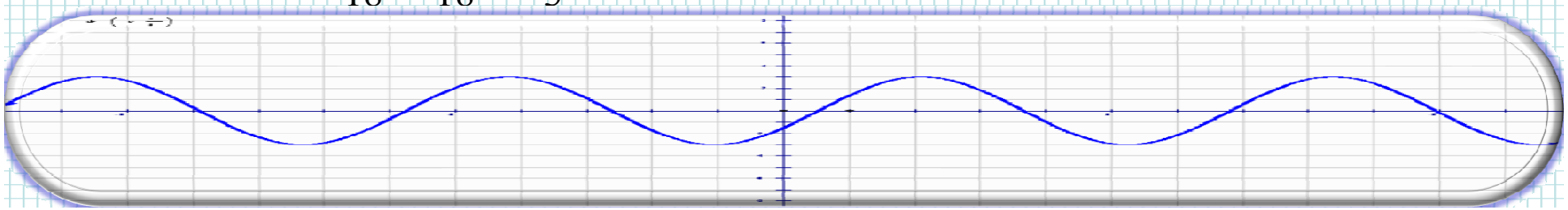
$$\cos\frac{\pi}{6}\sin 3x - \sin\frac{\pi}{6}\cos 3x = \frac{1}{2}$$

$$\sin(3x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{6} + 3x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z. \qquad x = (-1)^k \cdot \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$$

$$x = (-1)^k\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z.$$

Ответ $: (-1)^k\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$ /



5. Преобразование произведения в сумму.

Решить уравнение $-2\sin x \cdot \sin 3x = \cos 4x.$

Решение. Преобразуем левую часть в сумму

$\cos 4x - \cos 2x = \cos 4x;$

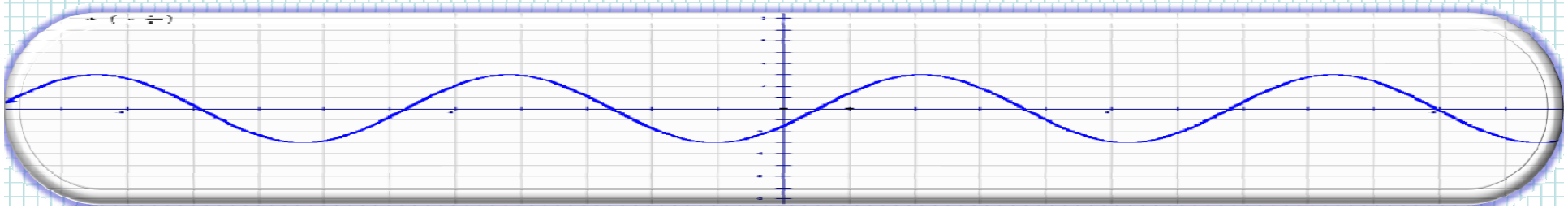
$-\cos 2x = 0;$

$\cos 2x = 0;$

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k;$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$



6. Универсальная подстановка

Используем формулы $\sin x = \dfrac{2\,tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$.

Решитьурав нение $3\sin x - 4\cos x = \dfrac{5}{2}$.

Решение . Заменим $\sin x$ *и* $\cos x$ *на их выражение черезtg* $\dfrac{x}{2}$

и обозначимt $g\,\dfrac{x}{2} = b$.

Получаем рациональн ое уравнение $\dfrac{6b}{1+b^2} - \dfrac{4(1-b^2)}{1+b^2} = \dfrac{5}{2}$, *которое преобразуе тся*

в квадратное $3b^2 + 12b - 13 = 0$.

Корнями этого уравнения являются числаb $_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{75}}{3}$

Уравнение сводится к решению двух простейших уравнений

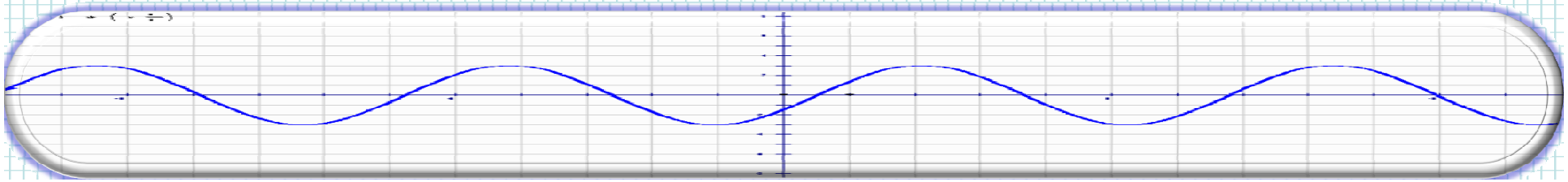
$tg\,\dfrac{x}{2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{75}}{3}$.

Находим , что $x = 2\mathrm{arctg}\,\dfrac{-6 \pm \sqrt{75}}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Значение видах $= 2\,arctg\ \pi + 2\pi n$ *иисходном уравнению* не удовлетвор яет,

что проверяетс япроверкой - подстановк ой данного значения x в исходное уравнение.

Ответ : $2\,arctg\,\dfrac{-6 \pm \sqrt{75}}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.



Решить уравнение: $\sin^2 x - 14\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$

Решение

Поскольку $1 = 4(\sin^2 x + \cos^2 x)$, то уравнение примет вид

$$\sin^2 x - 14\sin x\cdot\cos x + 4\cos^2 x + 4\sin^2 x + 4\cos^2 x = 0,$$

$$5\sin^2 x - 14\sin x\cdot\cos x + 8\cos^2 x = 0$$

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$

Получим

$$5tg^2 x - 14tgx + 8 = 0, \left[\begin{array}{l} tgx = \frac{4}{5}, \\ tgx = 2 \end{array}\right. \text{Значит} \left[\begin{array}{l} x = arctg\frac{4}{5} + \pi n, n \in Z, \\ x = arctg2 + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

Ответ $arctg\frac{4}{5} + \pi n, n \in Z, x = arctg2 + \pi k, k \in Z$

Решить уравнение:

$$\frac{\cos x\cos 2x\sin 5x}{\sqrt{-2\sin x}}=0$$

Решение:

$-2\sin x>0$ и $\sin x<0$ то:

$1-2\sin^2 x\cos 2x\sin 5x=0$

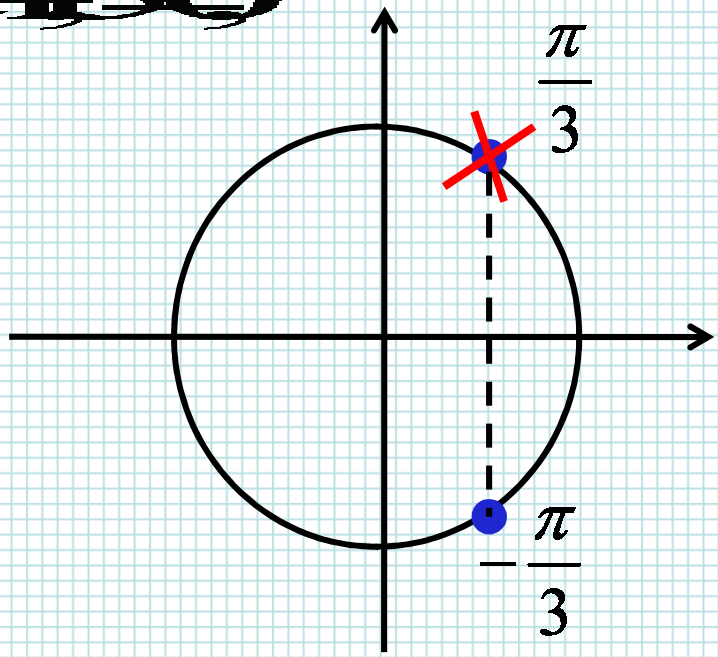
$\cos 5x=0$

$\cos 5x=5$

Такая $\sin x<0$, *то*

$$x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$$

Ответ $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$



Решите уравнение: $\sqrt{3}\sin x\,\mathrm{tg}\,x+\sin x=\sqrt{3}$

Укажите корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2};\frac{7\pi}{4}\right]$

Решение

1) $\cos x\neq 0$

2) $\sin x(\sqrt{3}+\mathrm{tg}\,x)=(\sqrt{3}+\mathrm{tg}\,x)=0$, $(\sqrt{3}+\mathrm{tg}\,x)(\sin x-1)=0$,

$\mathrm{tg}\,x=-\sqrt{3}$ или $\sin x=1$, так как $\cos x\neq 0$, то решений

$x=-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$

3) Отбор корней уравнения, принадлежащих промежутку $\left[\frac{\pi}{2};\frac{7\pi}{4}\right]$:

$-\frac{\pi}{2}\leq -\frac{\pi}{3}+\pi n\leq\frac{7\pi}{4}\ \Big|\times\frac{12}{\pi};\quad -6\leq -4+12n\leq 21;\quad -\frac{2}{12}\leq n\leq\frac{25}{12}.$

Так как $n\in Z$, то при $n=0$, $x=-\frac{\pi}{3}$; $n=1$, $x=\frac{2\pi}{3}$; $n=2$, $x=\frac{5\pi}{3}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

Решите уравнение: $(9\sin^3 x - 4\sin x)\sqrt{-8\,ctg\,x} = 0$

Решение

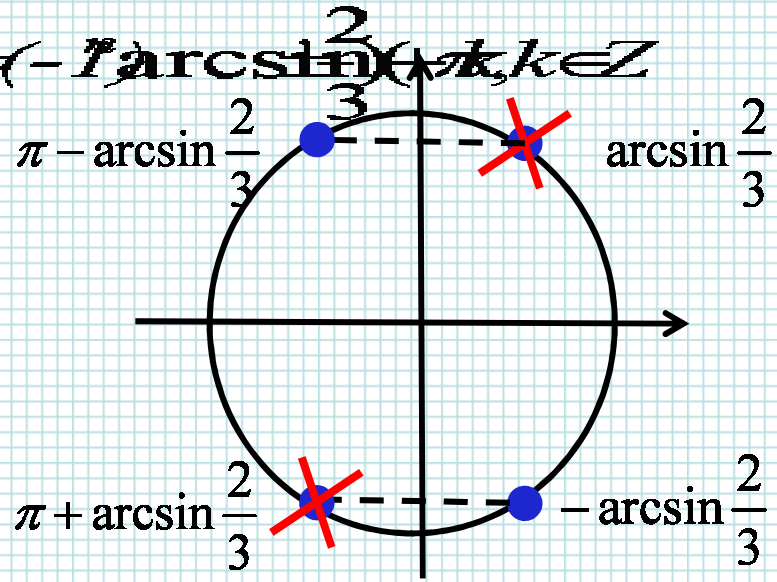
1) $\begin{cases} -8\,ctg\,x \geq 0, \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} ctg\,x \leq 0, \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$

2) $(9\sin^3 x - 4\sin x)\cdot\sqrt{-8\,ctg\,x} = 0$

$\sin x = 0$ или $9\sin^2 x - 4 = 0$ или $\sqrt{-8\,ctg\,x} = 0$

$x = \pi n, n \in Z$ $\sin x = \pm\frac{2}{3}$ $ctg\,x = 0$

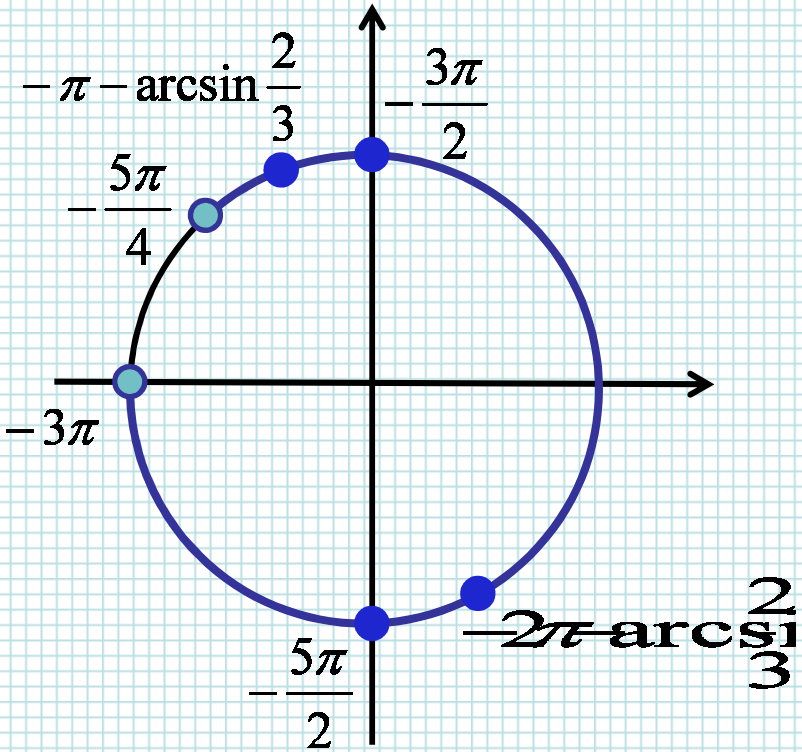
не принадлежит ОДЗ $x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{3} + \pi k, k \in Z$ $x = \pi n, n \in Z$



9. Найдите корни уравнения, принадлежащие $\left[-\frac{5\pi}{4}; \right.$

отрезку

$x = -\arcsin\frac{2}{3} + \pi n,\ n \in Z$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$



Ответ: $-\arcsin\frac{2}{3} + \pi n,\ n \in Z;$

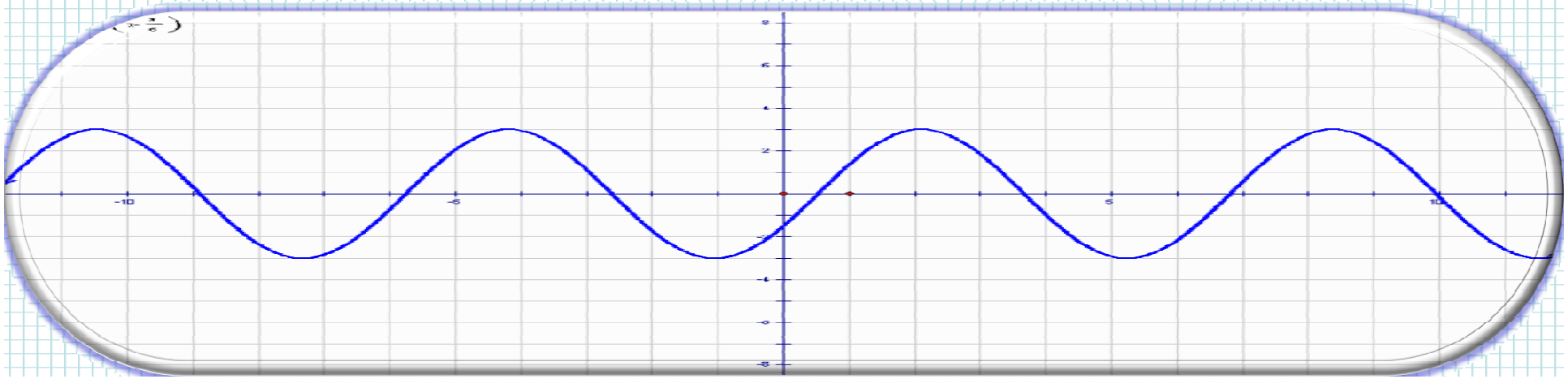
$\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$

$-\frac{5\pi}{2},\ -2\pi - \arcsin\frac{2}{3};$

$-\frac{3\pi}{2},\ -\pi - \arcsin\frac{2}{3}$

Интернет ресурсы

1. http://www.fipi.ru
2. http://reshuege.ru
3. http://alexlarin.net/



Пример 1

C1.

а) $\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}5$

$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = 0{,}5$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \pm \frac{1}{4}$

$x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi k$, или $x = \pi - \arccos \frac{1}{4} + 2\pi k$

и

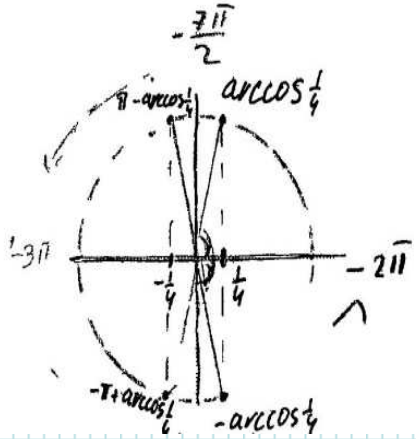
$x = -\pi + \arccos \frac{1}{4} + 2\pi k$ $\quad k \in Z.$

б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

1) $(\pi - \arccos \frac{1}{4}) - 2\pi = -\arccos \frac{1}{4} - \pi$

2) $-\pi + \arccos \frac{1}{4} - 2\pi = \arccos \frac{1}{4} - 3\pi$

3) $-\arcsin \frac{1}{4} - 2\pi$



Пример 2

C1

а) $\cos 2x - \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$

$\cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$

$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$

$-2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0$

$-\sin x\,(2\sin x + \sqrt{2}) = 0$

$\sin x = 0$

$x_1 = \pi n,\ n \in Z$

$2\sin x + \sqrt{2} = 0$

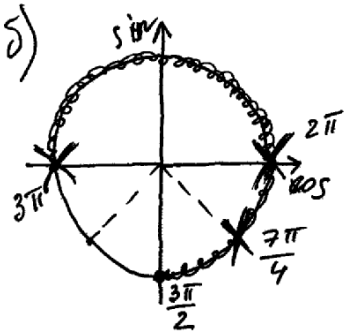
$2\sin x = -\sqrt{2}$

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

$x_3 = -\frac{3\pi}{4} + \pi m,\ m \in Z$

б)



Ответ: а) $x_1 = \pi n,\ n \in Z$

$x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

$x_3 = -\frac{3\pi}{4} + \pi m,\ m \in Z$

б) $\frac{7\pi}{4};\ 2\pi;\ 3\pi$

Пример 3

С1 а) $\cos 2x - \sin^2 x = 0{,}75$

б) корни из $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$

Решение.

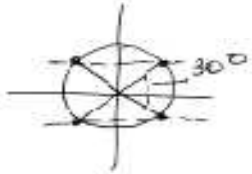
а) $\cos 2x + \sin^2 x = \frac{3}{4}$ Т.к. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x = \frac{3}{4}$

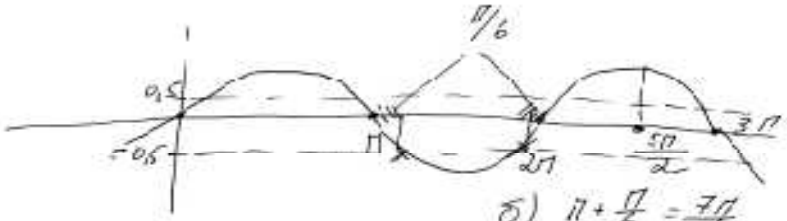
$1 - \frac{3}{4} = \sin^2 x$

$\sin^2 x = \frac{1}{4}$

$\sin x = \pm \frac{1}{2}$



б)



б) $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi m \\ x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi p \end{array}\right.$$

$k, n, m, p \in \mathbb{Z}$

Пример 4

15) а) $2\cos 2x + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0$ $\quad [\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

$2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0$

$2\cos^2 x - 2 + 2\cos^2 x + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0$

$4\cos^2 x + 4\sqrt{3}\cos x - 9 = 0$

Пусть $\cos x = y$, тогда

$4y^2 + 4\sqrt{3}y - 9 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 48 + 4 \cdot 9 \cdot 4 = 48 + 144 = 192$

$y_1 = \frac{-4\sqrt{3} + 8\sqrt{3}}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_2 = \frac{-4\sqrt{3} - 8\sqrt{3}}{8} = \frac{-12\sqrt{3}}{8} = -1{,}5\sqrt{3}$

Вернёмся к замене:

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos x = -1{,}5\sqrt{3}$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ $\qquad$ нет корней, так как $-1 \le \cos x \le 1$

б) $\frac{5\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + 2\pi k \le 4\pi \quad |-\frac{\pi}{6}$

$\frac{7\pi}{3} \le 2\pi k \le \frac{23\pi}{6} \quad |:2\pi$

$\frac{7}{6} \le k \le \frac{23}{12}$

k - нет $\Rightarrow$ нет корней

$\frac{5\pi}{2} \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le 4\pi \quad |+\frac{\pi}{6}$

$\frac{8\pi}{3} \le 2\pi k \le \frac{25\pi}{6} \quad |:2\pi$

$\frac{8}{6} \le k \le \frac{25}{12}$

$k = 2 \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{23\pi}{6}$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

б) $\frac{23\pi}{6}$

Пример 5

15. а) $2\cos 2x + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$

$2\cos 2x - 4\sin x + 1 = 0$

$2(\cos^2 x - \sin^2 x) - 4\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$

$2\cos^2 x - 2\sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - 4\sin x = 0$

$3\cos^2 x - \sin^2 x - 4\sin x = 0$

$3\cos^2 x - \sin x(\sin x + 4) = 0$

$3(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x - 4\sin x = 0$

$3 - 3\sin^2 x - \sin^2 x - 4\sin x = 0$

$-4\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0 \quad | \cdot (-1)$

$4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$

Пусть $\sin x = t \quad -1 \le t \le 1$

$4t^2 - 4t - 3 = 0$

$D = 16 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 16 + 48 = 64$

$t_{1,2} = \frac{4 \pm 8}{8} = \frac{12}{8} =$ не уд.

$\searrow -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$

Вернемся к исходной переменной

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

б) Отберем корни на $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

$\frac{3\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + 2\pi k \le 3\pi$

$\frac{9\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \le 2\pi k \le \frac{18\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$

$\frac{4\pi}{3} \le 2\pi k \le \frac{11\pi}{6}$

$\frac{4}{3} \le 2k \le \frac{11}{6}$

$\frac{4}{6} \le k \le \frac{11}{12}$ нет целых k

$\frac{3\pi}{2} \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \le 3\pi$

$\frac{9\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} \le 2\pi k \le \frac{12\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}$

$\frac{4\pi}{6} \le 2\pi k \le \frac{7\pi}{6}$

$\frac{1}{3} \le 2k \le \frac{7}{6}$

$\frac{1}{6} \le k \le \frac{7}{12}$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

б) $\frac{3\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} + 2\pi k \le 3\pi$

$\frac{5}{4} \le 2k \le \frac{11}{4}$

$\frac{5}{8} \le k \le \frac{11}{8}$

$k = 1: \quad x = \frac{9\pi}{4}$

$\frac{3\pi}{2} \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \le 3\pi$

$\frac{3}{4} \le 2k \le \frac{9}{4}$

$\frac{3}{8} \le k \le \frac{9}{8}$

$k = 1: \quad x = \frac{11\pi}{4}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

б) $\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}$

Пример 6

№ 15

а) $8\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cdot\cos x + 1 = 0$

$8\cdot(1-\cos^2 x) + 2\sqrt{3}\cdot\cos x + 1 = 0$

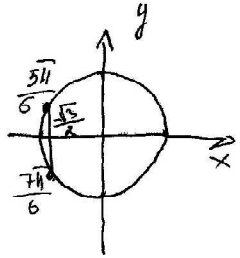
$-8\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cdot\cos x + 9 = 0$

Пусть $\cos x = t$, тогда

$-8t^2 + 2\sqrt{3}\cdot t + 9 = 0$

$D = 300$

$t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad t_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$



обратная замена

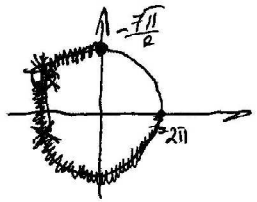
$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \cos x = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k\in Z$

$x = \arccos\frac{3\sqrt{3}}{4} + 2\pi n, n\in Z$

не уд условию $-1 \le \cos x \le 1$.

б) $x \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$



$k=0$, $x = \pm\frac{5\pi}{6}$

$k=-1$, $x = \pm\frac{7\pi}{6}$

Ответ: а) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k\in Z$.

б) $-\frac{5\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$.