Решение тригонометрических уравнений

Задание 13 представляет собой уравнение, которые требуется, во-первых, решить (то есть найти их решения, причем все), во-вторых, осуществить отбор решений по тому или иному ограничению. В последние годы на ЕГЭ по математике в **заданиях 13** школьникам предлагаются для решения ***тригонометрические уравнения***, Примеры структурированы по методам решения уравнений, от самых элементарных, до достаточно сложных. Прежде чем перейти к разбору конкретных тригонометрических уравнений, вспомним основные формулы тригонометрии. Приведем их здесь в справочном виде.

Основные формулы тригонометрии

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

http://yourtutor.info/

Основные тригонометрические формулы

Решение простейших тригонометрических уравнений

$$\sin x = t, \text{при } |t| \le 1 \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin t + \pi n, n \in Z$$

$$\cos x = t, \text{при } |t| \le 1 \Leftrightarrow x = \pm \arccos t + 2\pi n, n \in Z$$

$$\mathrm{tg}\, x = t, \text{при } x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n \Leftrightarrow x = \mathrm{arctg}\, t + \pi n, n \in Z$$

Частные случаи

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in Z$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = -\pi + 2\pi n, n \in Z$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in Z$$

http://yourtutor.info/

Синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	нет	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	нет	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	нет	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	нет	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

http://yourtutor.info/

Решение простейших тригонометрических уравнений

Пример 1. Найдите корни уравнения $\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. принадлежащие промежутку $(-\pi;\pi)$.

Решение. Используем вторую формулу на рисунке. Здесь и далее полагаем $k,\ n\in Z$ (на всякий случай, эта запись означает, что числа n и k принадлежат множеству целых чисел): $4x+\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi k$.

Арккосинус a есть число, заключенное в интервале от 0 до π, косинус которого равен a.

Арксинус a есть число, заключенное в интервале от $-\pi$ до π, косинус которого равен a.

Другими словами, нам нужно подобрать такое число из промежутка $[0;2\pi]$, косинус которого был бы равен $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Это число $\frac{3\pi}{4}$. Используя это, получаем:

$$4x+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}, \\ x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}. \end{array}\right.$$

Из полученных серий выбираем только те ответы, которые принадлежат промежутку $(-\pi;\pi)$. Воспользуемся для этого методом двойных неравенств. Вы помните, что k и n — целые числа:

1) $-\pi\leqslant\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}<\pi \Leftrightarrow -1\leqslant\frac{1}{8}+\frac{k}{2}<1 \Leftrightarrow -\frac{9}{4}\leqslant k<\frac{7}{4} \Leftrightarrow$
$k=-2,\ -1,\ 0,\ 1 \Leftrightarrow x=-\frac{7\pi}{8},\ -\frac{3\pi}{8},\ \frac{\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8}$.

2) $-\pi\leqslant-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}<\pi \Leftrightarrow -1\leqslant-\frac{1}{4}+\frac{k}{2}<1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\leqslant k<\frac{5}{2} \Leftrightarrow$
$k=-1,\ 0,\ 1,\ 2 \Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{4},\ -\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}$.

Задача для самостоятельного решения №1. Найдите корни уравнения $\sin\left(\frac{4x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$. принадлежащие промежутку $[-2\pi;2\pi)$.

Показать ответ

Решение линейных тригонометрических уравнений

Пример 2. Найдите корни уравнения

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=1.$$

принадлежащие промежутку $(-2\pi;4\pi]$.

Решение. Подобные уравнения решаются один весьма интересным, на мой взгляд, способом. Разделим обе части на 2, уравнение тогда примет вид:

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1.$$

Подберем такое число, синус которого равен $\frac{1}{2}$, а косинус равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Например, пусть это будет число $\frac{\pi}{6}$. С учетом этого перепишем уравнение в виде:

$$\sin\frac{\pi}{6}\sin x + \cos\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{1}{2}.$$

Присмотревшись, слева от знака равенства усматриваем разложение косинуса разности x и $\frac{\pi}{6}$. Это и есть ключ к решению. Имеем:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k. \\ x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n. \end{array}\right.$$

Осуществляем отбор решений, входящих в промежуток $[-2\pi; 4\pi)$:

1) $-2\pi \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant 4\pi \Leftrightarrow -2 \leqslant \frac{1}{2} + 2k \leqslant 4 \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \leqslant k \leqslant \frac{7}{4} \Leftrightarrow$
$k = -1, 0, 1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}.$

2) $-2\pi \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant 4\pi \Leftrightarrow -2 \leqslant -\frac{1}{6} + 2n \leqslant 4 \Leftrightarrow -\frac{11}{12} \leqslant n \leqslant \frac{25}{12} \Leftrightarrow$
$n = 0, 1, 2 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}.$

Задача для самостоятельного решения №2. Найдите корни уравнения $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$, принадлежащие промежутку $[-3\pi; 3\pi]$.

Показать ответ

Решение тригонометрических уравнений методом замены переменной

Пример 3. Дано уравнение $\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + 6 = 0$. а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезке $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

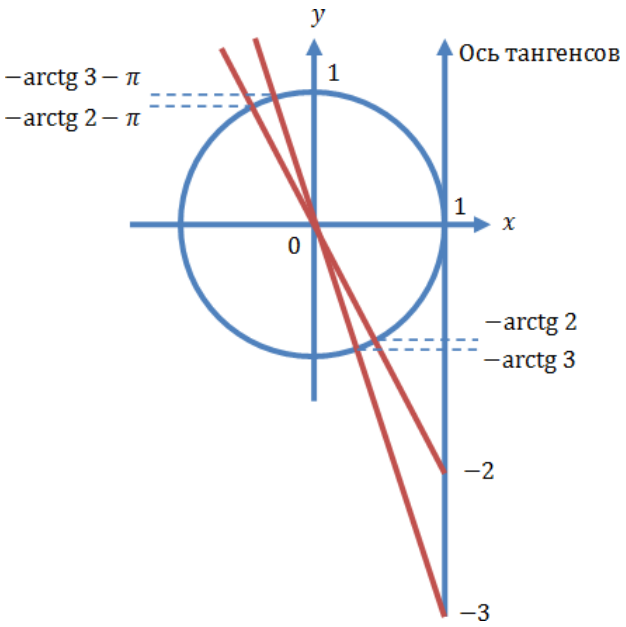
Решение. Сразу оговорим ограничения, накладываемые на переменную x в этом уравнении: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$. Откуда взялось это ограничение? Правильно, функция $y = \operatorname{tg} x$ не существует при этих значениях x. Используем замену переменной: $t = \operatorname{tg} x$. Тогда уравнение принимает вид:

$$t^2+5t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3. \\ t=-2. \end{array}\right.$$

Переходим к обратной замене:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x=-3. \\ \operatorname{tg} x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\operatorname{arctg} 3+\pi k. \\ x=-\operatorname{arctg} 2+\pi n. \end{array}\right.$$

Осуществляем отбор решений. Проведем его на этот раз с использованием единичной окружности.



Отбор корней с помощью единичной окружности

Из рисунка видно, что в интересующий нас промежуток входят только два значения из этих серий: $-\operatorname{arctg} 2-\pi.$ $-\operatorname{arctg} 3-\pi.$ Обратите внимание на один существенный момент. На рисунке точки -2 и -3 принадлежат оси тангенсов, а точки $-\operatorname{arctg} 2.$ $-\operatorname{arctg} 3.$ $-\operatorname{arctg} 2-\pi$ и $-\operatorname{arctg} 3-\pi$ — единичной окружности. Очень важно понимать, зачем это нужно для решения данной задачи.

Ответ: $-\operatorname{arctg} 2-\pi.$ $-\operatorname{arctg} 3-\pi.$

Задача для самостоятельного решения №3. Дано уравнение $6\cos^2 x-7\cos x-5=0.$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi].$

Показать ответ

Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители

Пример 4. Дано уравнение

$$\sin 2x = 2\sin x - \cos x + 1.$$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Равносильными преобразования приводим уравнение к виду:

$$\sin 2x = 2\sin x - \cos x + 1 \Leftrightarrow$$

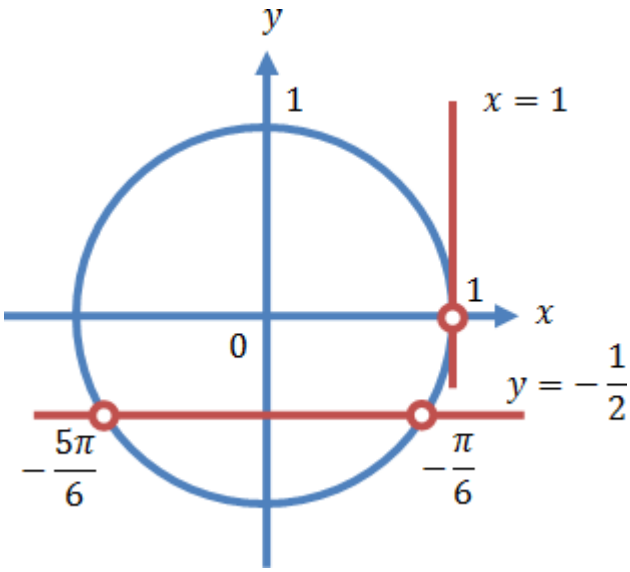
$$2\sin x\cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sin x(\cos x - 1) + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\cos x - 1)(2\sin x + 1) = 0 \left[\begin{array}{l} \cos x - 1 = 0. \\ 2\sin x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 1. \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k. \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n. \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi z. \end{array}\right.$$

Осуществляем отбор решений с помощью единичной окружности.



Отбор решений с помощью единичной окружности

Из рисунка видно, что в интересующий нас промежуток входят только два значения из всех этих серий: $-\frac{5\pi}{6}$. -2π.

Задача для самостоятельного решения №4. Дано уравнение

$$3\sin 2x - 4\cos x + 3\sin x - 2 = 0.$$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Показать ответ

Комбинированные уравнения

При решении уравнений этого типа важно обращать внимание на область допустимых значений входящих в него переменных. Именно поэтому составители вариантов ЕГЭ не просят учеников осуществлять отбор решений из полученных серий ответов. Решение этих уравнений само собой подразумевает выполнение данной математической операции.

Пример 5. Решите уравнение:

$$\sqrt{1-2\sin 3x\sin 7x}=\sqrt{\cos 10x}.$$

Решение. Данное уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} 1-2\sin 3x\sin 7x=\cos 10x. \\ \cos 10x\geqslant 0. \end{cases}$$

Обратите внимание! Писать, что $1-2\sin 3x\sin 7x\geqslant 0.$ нет никакой необходимости, поскольку по условию это выражение равно выражению $\cos 10x.$ которое, в свою очередь, больше или равно нулю.

Решаем первое уравнение системы:

$$1-2\sin 3x\sin 7x=\cos(7x+10x)\Leftrightarrow$$

$$1-2\sin 3x\sin 7x=\cos 3x\cos 7x-\sin 3x\sin 7x\Leftrightarrow$$

$$1=\cos 3x\cos 7x+\sin 3x\sin 7x\Leftrightarrow\cos 4x=1.$$

$$\cos 10x=1\Leftrightarrow 4x=2\pi k\Leftrightarrow x=\frac{\pi k}{2}.$$

Нужно, чтобы $\cos 10x\geqslant 0.$ поразмыслив, понимаем, что поэтому из полученной серии ответов нам подходят только $x=\pi k$.

Ответ: πk.

Задача для самостоятельного решения №5. Решите уравнение: $\sqrt{\sin 3x}=\sqrt{1+2\sin 4x\cos x}.$

Показать ответ

Пример 6. Решите уравнение:

$$\frac{2\sin^2 x - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1}{\sqrt{\sin x}} = 0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

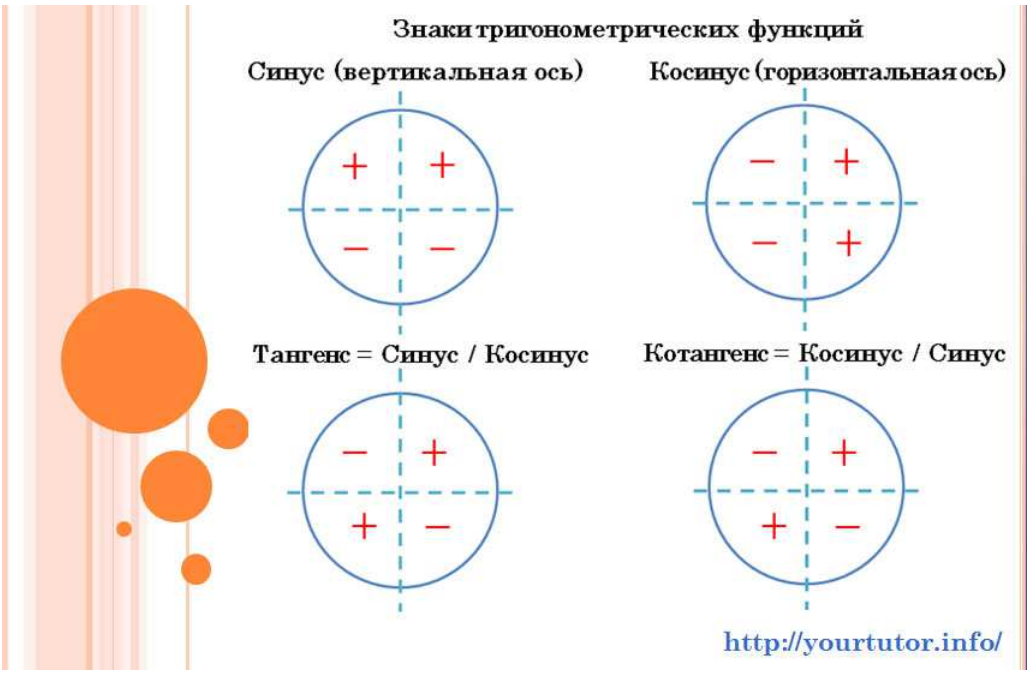
$$\begin{cases} 2\sin^2 x - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0. \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0. \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 1. \\ \cos x = -\frac{1}{2}. \end{array}\right. \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k. \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n. \end{array}\right. \\ \sin x > 0 \end{cases}$$

Тригонометрическая функция синус положительна в первой и второй координатной четвертях, поэтому из полученных серий выбираем только эту: $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k.$

Раз уж мы с этим столкнулись, не лишним будет повторить, какие знаки принимают тригонометрические функций в различных координатных четвертях:



Знаки функций, входящих в тригонометрические уравнения, по координатным четвертям

Ответ: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k.$

Задача для самостоятельного решения №6. Решите уравнение: $\frac{\cos 2x - \cos x}{1-\sqrt{\sin x}} = 0.$

Показать ответ

Пример 7. Решите уравнение:

$$\frac{\sin 2x}{|\cos x|} = 2\sin x - 2.$$

Решение. Область допустимых значения уравнения определяется условием: $\cos x \neq 0.$ то есть $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n.$ Разобьем решение на два случая:

1) Пусть $\cos x > 0.$ тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{2\sin x \cos x}{\cos x} = 2\sin x - 2 \Leftrightarrow$$

$$2\sin x = 2\sin x - 2 \Leftrightarrow 0 = -2.$$

Последнее равенство неверно, поэтому в данном случае решений у уравнения не будет.

2) Пусть $\cos x < 0.$ тогда уравнение принимает вид:

$$-\frac{2\sin x \cos x}{\cos x} = 2\sin x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k. \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n. \end{array} \right.$$

Условию $\cos x < 0$ удовлетворяет только последняя серия.

Ответ: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$

Задача для самостоятельного решения №7. Решите уравнение: $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} 2x = 0.$