

«Решение простейших тригонометрических уравнений»

Решение простейших тригонометрических уравнений (в итоге к ним сводятся все более сложные тригонометрические уравнения):

$$\sin x = a$$

имеет решение при $-1 \leq a \leq 1$

Решением являются два корня (Z — целое число):

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Обе формулы можем объединить в одну:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in Z$$

Определение: Пусть число a по модулю не превосходит единицы. Арксинусом числа a называется угол x , лежащий в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ синус которого равен a . Например:

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{так как} \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

* * *

$$\cos x = a$$

имеет решение при $-1 \leq a \leq 1$

Решением являются два корня:

$$x_1 = \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$x_2 = -\arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Обе формулы можем объединить в одну:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Определение: Пусть число a по модулю не превосходит единицы. Арккосинусом числа a называется угол x , лежащий в пределах от 0 до π косинус которого равен a . Например:

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \text{так как} \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Если при решении уравнения вы получите:

$$\cos x = 7 \text{ или } \sin x = -\frac{10}{7}$$

знайте, решения у данных уравнений нет,

так как значения лежат за пределами интервала $[-1; 1]$.

* * *

$$\operatorname{tg} x = a$$

имеет решение при любом a

Решением является корень:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Определение: Арктангенсом числа a (a — любое число) называется угол x принадлежащий интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a . Например:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} \quad \text{так как} \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

* * *

$$\operatorname{ctg} x = a$$

имеет решение при любом a

Решением является корень:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Определение котангенса: Арккотангенсом числа a (a — любое число) называется угол x принадлежащий интервалу $(0; \pi)$, котангенс которого равен a .

Итак, формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:

Уравнение	Решения
$\sin x = a, a \leq 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a, a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Значения $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$ острых углов от 0° до 90° ,
которые необходимо помнить:

Аргумент	Функция			
	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$0^\circ \quad (0)$	0	1	0	не определен
$30^\circ \quad \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ \quad \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60^\circ \quad \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$90^\circ \quad \left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	не определен	0

В простейшем тригонометрическом уравнении может получиться отрицательное значение, то есть тригонометрическая функция от аргумента может иметь отрицательное значение. Например:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos x = -0,1 \quad \operatorname{tg} x = -2 \quad \text{и т. д.}$$

Если в ходе решения возникнут затруднения, и необходимо будет определить соответствующий такому значению угол, то воспользуйтесь формулами:

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$$

Примеры:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Значит,} \quad x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Таким образом,

$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

* * *

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

Значит, $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k, \quad k \in Z$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Таким образом,

$$x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k, \quad k \in Z$$

* * *

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Значит, $x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n, \quad n \in Z$

$$x = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n, \quad n \in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z$$

* * *

*Стоит отметить, что функции арксинуса и арктангенса являются нечётными, это можно увидеть по их графикам (они симметричны относительно начала координат)

2013

Подготовка к ЕГЭ по математике

«Решение тригонометрических
уравнений»

Подробно разобрано 45 примеров.
Задания с сайта www.reshuege.ru



МАТЕМАТИКА? ЛЕГКО!!!

Дорогие друзья, для решения данных примеров (задач) вы должны владеть в совершенстве всеми инструментами для преобразования уравнений (любых уравнений). Должны знать формулы сокращённого умножения, значения тригонометрических функций, их знаки на тригонометрической окружности, основные формулы тригонометрии, формулы корней простейших тригонометрических уравнений.

Должны понимать, что такое периодичность, чётность (нечётность) тригонометрических функций, Необходимо уметь определять область допустимых значений, безошибочно определять корни принадлежащие ей, изображать их на тригонометрической окружности. Не зря её называют «золотое сердце тригонометрии», поняв как она взаимосвязана с тригонометрическими функциями, вы поймёте всю тригонометрию.

Ключевым моментом при решении подобных уравнений и их систем является умение сопоставить корни, найденные при решении уравнения с областью его определения. Вы можете правильно найти корни уравнения, но если не сможете определить те из них, которые принадлежат области определения, то общий ответ будет неверен.

Когда решаете тригонометрические уравнения, всегда делайте эскиз тригонометрической окружности, наглядность при решении таких задач очень помогает. Вы избежите ошибок.

484540. Решите уравнение

$$\frac{\cos 2x + \sin x}{\sqrt{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}} = 0$$

Решение:

Найдем область определения уравнения. Известно, что выражение, стоящее под знаком корня должно быть больше нуля или равно ему (корень из отрицательного числа не извлекается), кроме этого знаменатель дроби не равен нулю (на ноль делить нельзя). Значит,

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

известно, что функция синуса положительна в 1 и 2 четверти, то есть угол лежит в пределах от 0 до π (от 0 до 180 градусов), так же учитываем период синуса, который равен $2\pi n$:

$$\begin{aligned} 2\pi n < x - \frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi n & \quad \left| + \frac{\pi}{4} \right. \\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, & \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Известно, что дробь равна нулю тогда. Когда её числитель равен нулю, значит:

$$\cos 2x + \sin x = 0$$

Найдем корни числителя, используем формулу $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$:

$$-2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

Примем $\sin x = t$, тогда $2t^2 - t - 1 = 0$. Решая квадратное уравнение, получим $t_1 = 1$, $t_2 = -0,5$. Таким образом, $\sin x = 1$ и $\sin x = -0,5$

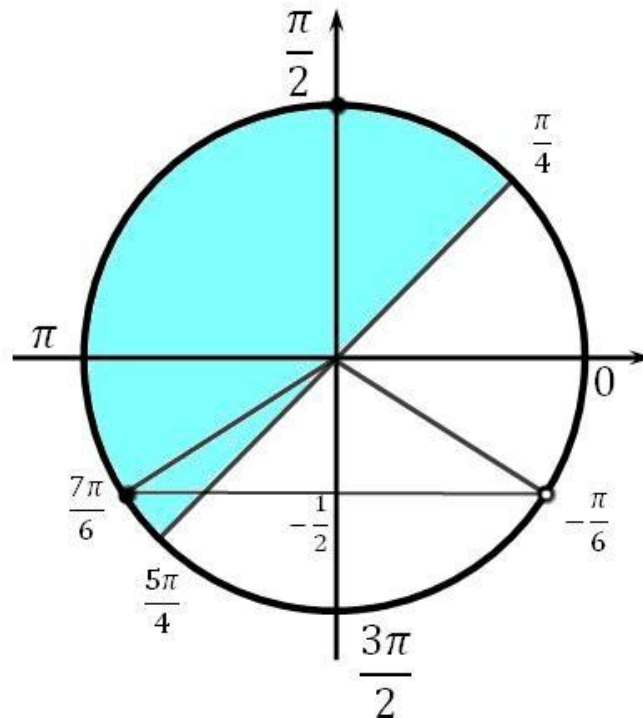
Решаем $\sin x = 1$:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем $\sin x = -0,5$:

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

С учетом области определения уравнения получаем:



$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Корень $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ в область определения не входит.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

484541. Решите уравнение

$$\frac{2\sin^2 x - \sin 2x - 2\cos 2x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Решение:

Найдем область определения уравнения. Выражение под знаком корня есть число неотрицательное, кроме этого знаменатель не равен нулю, значит:

$$1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow (1 - x)(1 + x) > 0$$

Решая неравенство, получим $-1 < x < 1$.

Обратите внимание, что -1 и 1 это радианы ($1 \text{ радиан} \approx 57,297^\circ$, $\pi \text{ радиан} = 180^\circ$). То есть $-57,297^\circ < x < 57,297^\circ$.

Найдем корни числителя (дробь равна нулю тогда, когда её числитель равен нулю): $2\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos 2x = 0$

Воспользуемся формулами синуса и косинуса двойного аргумента:

$$2\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$2\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 2\cos^2 x + 2\sin^2 x = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right.$$

$$2\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 2 + 2\operatorname{tg}^2 x = 0$$

$$4\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 2 = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{2} \right.$$

$$2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0$$

Примем $\operatorname{tg} x = t$, тогда $2t^2 - t - 1 = 0$. Решая квадратное уравнение, получим $t_1 = 1$, $t_2 = -0,5$. Таким образом, $\operatorname{tg} x = 1$ и $\operatorname{tg} x = -0,5$.

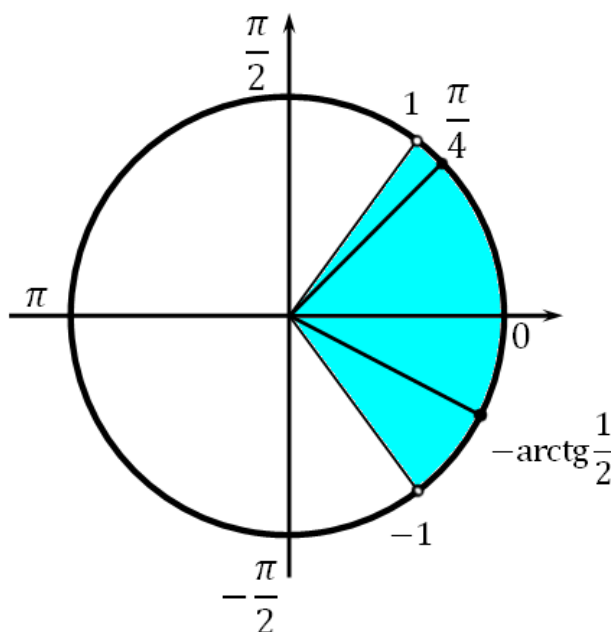
Решаем $\operatorname{tg} x = 1$:

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем $\operatorname{tg} x = -0,5$:

$$x = \operatorname{arctg}(-0,5) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Отметим корни на тригонометрической окружности:



С учётом области определения получаем:

$$x = \frac{\pi}{4}, \quad x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}, \quad x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

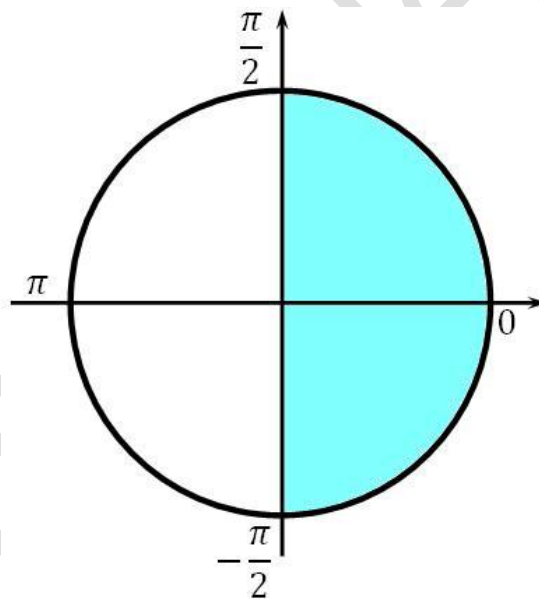
484542. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y + \cos x = 0 \\ (5\sqrt{\cos x} - 1)(4y + 5) = 0 \end{cases}$$

Решение:

Найдем область определения уравнения. Выражение под знаком корня число неотрицательное, значит $\cos x \geq 0$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$



Это первая и четвёртая четверть, включая её границы. Обратите внимание, что область определения периодична.

В данной задаче мы можем решить второе уравнение, Далее подставить полученные решения в первое и, таким образом, найти решение удовлетворяющее уравнениям системы.

Произведение двух выражений равно нулю, если хотя бы одно из них равно нулю, а другое при этом не теряет смысла. Решая второе уравнение, получаем:

$$5\sqrt{\cos x} - 1 = 0 \quad \text{либо} \quad 4y + 5 = 0$$

$$\sqrt{\cos x} = \frac{1}{5} \quad 4y = -5$$

$$\cos x = \frac{1}{25} \quad y = -\frac{5}{4}$$

Значение $\frac{1}{25}$ попадает в область определения.

Рассмотрим первое уравнение.

Если $y = -\frac{5}{4}$, то из первого уравнения следует, что $\cos x = \frac{1}{25}$. Уравнение не имеет решений, так как значение косинуса должно лежать в пределах от -1 до 1 . Если $\cos x = \frac{1}{25}$, то $x = \pm \arccos \frac{1}{25} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и из первого уравнения получаем: $y = -\frac{1}{25}$.

Ответ: $\left\{ \left(\arccos \frac{1}{25} + 2\pi n, -\frac{1}{25} \right), \left(-\arccos \frac{1}{25} + 2\pi n, -\frac{1}{25} \right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$.

484543. Решите уравнение $\sqrt{9 - x^2} \cdot \cos x = 0$.

Решение:

Найдём область определения уравнения:

$$9 - x^2 \geq 0$$

$$(9 - x)(9 + x) \geq 0$$

$$-3 \leq x \leq 3$$

-3 и 3 в данном случае это радианы (1 радиан $\approx 57,297^\circ$), если записать в градусах, то $-171,9^\circ \leq x \leq 171,9^\circ$.

Произведение равно нулю тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другое при этом не теряет смысла, поэтому

$$\sqrt{9 - x^2} = 0 \quad \text{либо} \quad \cos x = 0$$

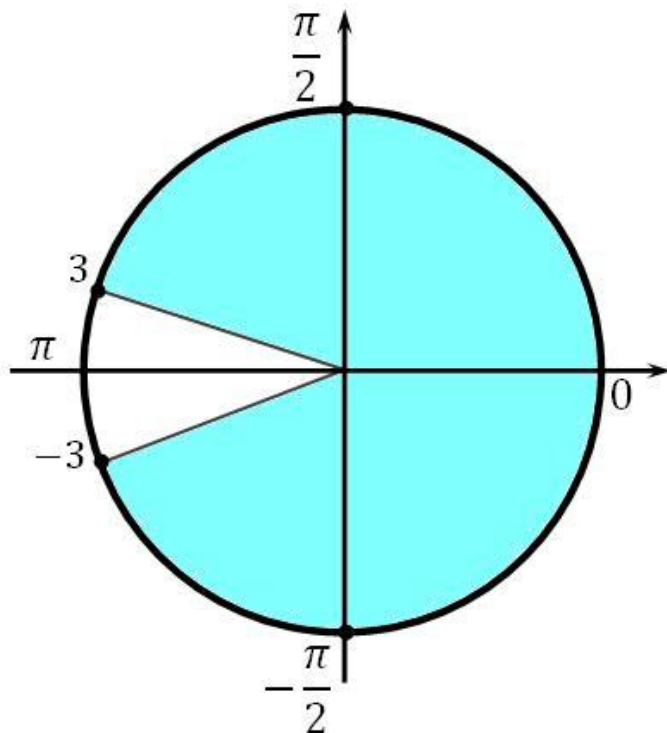
$$9 - x^2 = 0 \quad x = \pm \arccos 0 + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm 3$$

$$x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Но так как область определения: $-171,9^\circ \leq x \leq 171,9^\circ$ (она не периодична),

то $x = \pm \frac{\pi}{2}$



Ответ: $\pm 3; x = \pm \frac{\pi}{2}$

484544. Решите уравнение $\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt{3x^2 - 7x + 4} = 0$.

Решение:

Найдём область определения уравнения. Известно, что подкоренное выражение должно быть неотрицательным, значит

$$3x^2 - 7x + 4 \geq 0$$

$$(x - 1) \left(x - \frac{4}{3}\right) \geq 0$$

Решая неравенство, получим:

$$x \leq 1 \quad \cup \quad x \geq \frac{4}{3}$$

В градусах (учитывая, что $1 \text{ радиан} \approx 57,297^\circ$):

$$x \leq 57,297^\circ \cup x \geq 76,396^\circ$$

То есть из всей области определения выпадает только интервал:

$$57,297^\circ < x < 76,396^\circ$$

Произведение двух выражений равно нулю, если хотя бы одно из них равно нулю, а другое при этом не теряет смысла, значит:

$$\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \text{либо} \quad 3x^2 - 7x + 4 = 0$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (x - 1)\left(x - \frac{4}{3}\right) = 0$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad x = 1 \quad \text{или} \quad x = \frac{4}{3}$$

Корни $x = 1$ и $x = \frac{4}{3}$ принадлежат области определения.

Рассмотрим корень

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Мы установили, что корни лежащие в интервале:

$$57,297^\circ < x < 76,396^\circ$$

не являются решением уравнения.

Такой корень существует только один:

$$x = \frac{\pi}{3} \quad (\text{это } 60^\circ)$$

Существует он при $n = 0$.

Поэтому решением является:

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$

Можно решение данного уравнения изложить в следующей форме (кратко):

$$\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt{3x^2 - 7x + 4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 3x^2 - 7x + 4 \geq 0 \\ 3x^2 - 7x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ (x-1)\left(x-\frac{4}{3}\right) \geq 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{1; \frac{4}{3}\right\} \cup \left\{(-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$

484545. Решите уравнение $|\cos x + \sin x| = \sqrt{2}\sin 2x$.

Решение:

Отметим, что выражение $\sqrt{2}\sin 2x \geq 0$, так как $|\cos x + \sin x|$ имеет неотрицательное значение, поэтому

$$\sin 2x \geq 0$$

Используя свойство модуля, получим два отдельных уравнения, решения каждого из них будут являться решением данного уравнения:

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin 2x \quad \text{либо} \quad -(\cos x + \sin x) = \sqrt{2}\sin 2x$$

Решаем $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin 2x$.

Возводим в квадрат обе части:

$$(\cos x + \sin x)^2 = 2\sin^2 2x$$

$$\cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x = 2\sin^2 2x$$

$$2\sin^2 2x - \sin 2x + 1 = 0$$

Решая квадратное уравнение, получим: $\sin 2x = 1$ и $\sin 2x = -\frac{1}{2}$.

Так как $\sin 2x \geq 0$ (это область допустимых значений), то второе уравнение решать нет смысла.

Решаем $\sin 2x = 1$, получим:

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \left| \cdot \frac{1}{2} \right.$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Решением уравнения $-(\cos x + \sin x) = \sqrt{2}\sin 2x$ является тот же корень, так как при возведении в квадрат обеих частей получим то же уравнение.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

484546. Решите уравнение $(2\cos^2 x - \cos x)\sqrt{-11\operatorname{tg} x} = 0$.

Найдём область допустимых значений. Известно, что подкоренное выражение число неотрицательное:

$$-11\operatorname{tg} x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} x \leq 0$$

Тангенс отрицателен во второй и четвёртой четверти, при чём $\cos x \neq 0$, так как $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, поэтому область определения уравнения имеет вид:

$$\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq \pi + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом не теряет смысла, значит:

$$2\cos^2 x - \cos x = 0 \quad \text{или} \quad -11\operatorname{tg} x = 0$$

при чём $\cos x \neq 0$

$$2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\operatorname{tg} x = 0$$

$$\cos x(2\cos x - 1) = 0$$

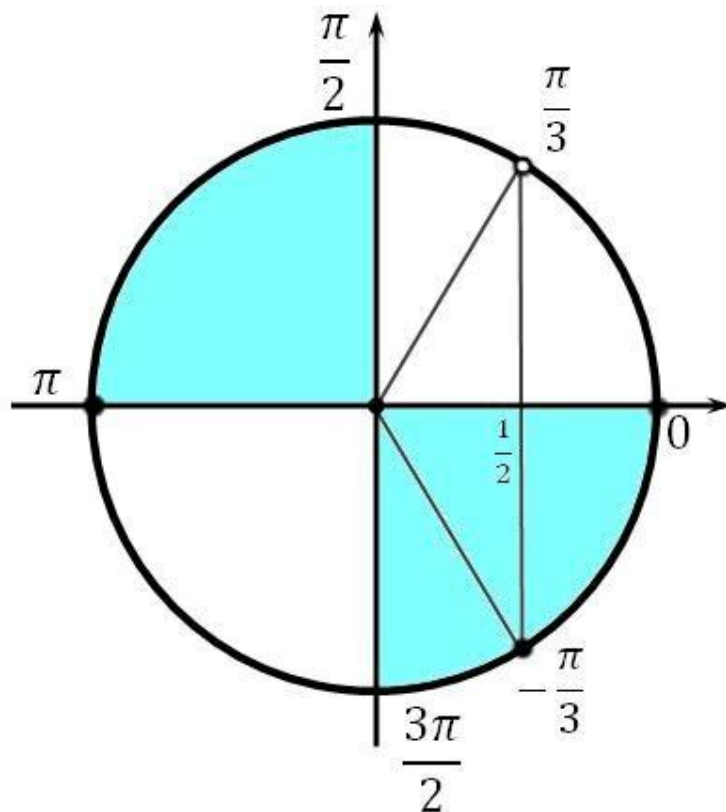
$$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Из уравнения $\cos x(2\cos x - 1) = 0$ получаем $\cos x = \frac{1}{2}$ либо $\cos x = 0$.

Так как стоит условие, что $\cos x \neq 0$, то решать $\cos x = 0$ нет смысла.

Решением уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ являются корни:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{либо} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



Первое значение лежит в первой четверти и не является корнем (для него неравенство $\operatorname{tg} x \leq 0$ не выполняется), второе — в четвертой четверти (для него неравенство $\operatorname{tg} x \leq 0$ выполняется).

Итак, решением данного уравнения являются корни:

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Можно было изначально записать равносильную систему и решать её (это другая форма записи), решайте так, как вам удобнее:

$$\begin{cases} 2\cos^2 x - \cos x = 0 \\ \operatorname{tg} x < 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \operatorname{tg} x = 0 \end{cases}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

484547. Решите уравнение

$$\frac{26\cos^2 x - 23\cos x + 5}{13\sin x - 12} = 0$$

Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

Поэтому данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 26\cos^2 x - 23\cos x + 5 = 0 \\ \sin x \neq \frac{12}{13} \end{cases}$$

Уравнение $26\cos^2 x - 23\cos x + 5 = 0$ квадратное.

Произведём замену $\cos x = t$. Получим $26t^2 - 23t + 5 = 0$.

Решая его, найдём два корня:

$$t = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad t = \frac{5}{13}$$

$$\text{Значит } \cos x = \frac{1}{2} \quad \text{либо} \quad \cos x = \frac{5}{13}$$

Если $\cos x = \frac{1}{2}$, то $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ и условие $\sin x \neq \frac{12}{13}$ выполняется.

Следовательно, $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Если $\cos x = \frac{5}{13}$, то $\sin x = \pm \frac{12}{13}$.

В этом случае с учетом неравенства $\sin x \neq \frac{12}{13}$ системы получаем, что из двух точек единичной окружности, соответствующих решениям уравнения $\cos x = \frac{5}{13}$, нужно оставить только ту, для которой $\sin x = -\frac{12}{13}$.

Это точка четвертой четверти, и решение уравнения имеет вид:

$$x = -\arccos \frac{5}{13} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = -\arccos \frac{5}{13} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

484548. Решите уравнение

$$\frac{2\sin^2 x + 2\sin x \cos 2x - 1}{\sqrt{\cos x}} = 0$$

Решение:

Найдём область определения уравнения.

Известно, что подкоренное выражение число неотрицательное, кроме того знаменатель не равен нулю:

$$\cos x > 0$$

функция косинуса положительна в первой и четвёртой четверти, то есть

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Дробь равна нулю тогда, когда числитель равен нулю, значит:

$$2\sin^2 x + 2\sin x \cos 2x - 1 = 0$$

$$2\sin^2 x + 2\sin x \cos 2x - (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$2\sin^2 x + 2\sin x \cos 2x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos 2x - \cos^2 x = 0$$

$$2\sin x \cos 2x - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$2\sin x \cos 2x - \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x (2\sin x - 1) = 0$$

$$\cos 2x = 0 \quad \text{либо} \quad 2\sin x - 1 = 0$$

$$2x = \pm \arccos 0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Учитывая область определения (угол должен лежать в первой или четвёртой четверти) получим:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

484549. Решите уравнение

$$\frac{2\cos^2 x - 2\cos x \cos 2x - 1}{\sqrt{\sin x}} = 0$$

Решение:

Найдём область определения уравнения. Известно, что подкоренное выражение число неотрицательное, кроме того, знаменатель не равен нулю:

$$\sin x > 0$$

функция синуса положительна в первой и второй четверти, то есть

$$2\pi k < x < \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Дробь равна нулю тогда, когда числитель равен нулю, значит:

$$2\cos^2 x - 2\cos x \cos 2x - 1 = 0$$

$$2\cos^2 x - 2\cos x \cos 2x - (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$\cos^2 x - 2\cos x \cos 2x - \sin^2 x = 0$$

$$\cos 2x - 2\cos x \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x(1 - 2\cos x) = 0$$

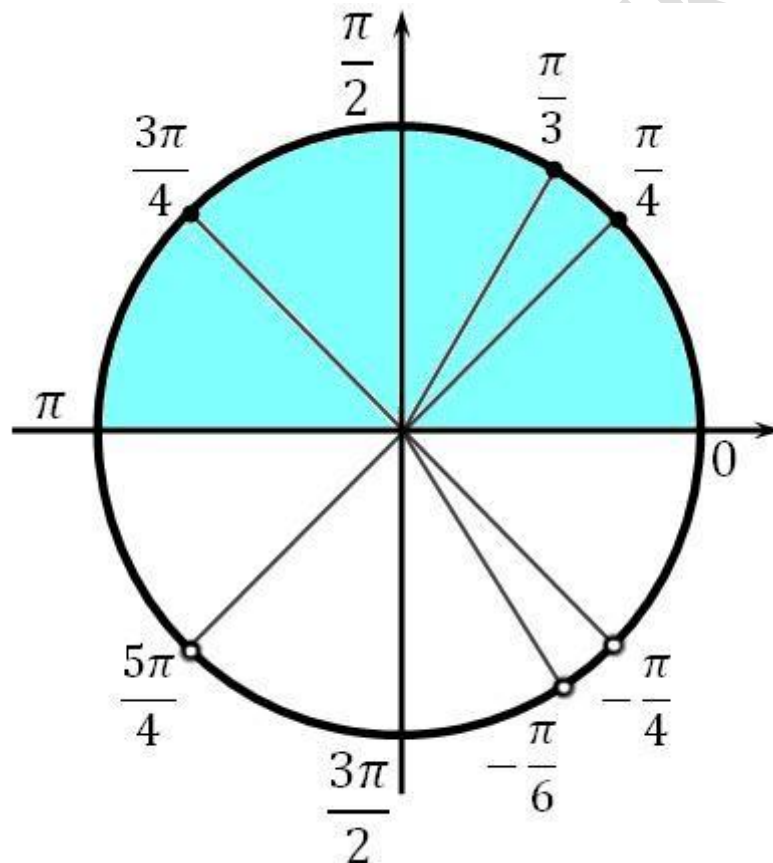
$$\cos 2x = 0 \quad \text{либо} \quad 2\cos x - 1 = 0$$

$$2x = \pm \arccos 0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Учитывая область определения (корни уравнения лежат в первой или второй четвертях) получим:



$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

484550. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{\cos y} \cdot \sqrt{6x - x^2 - 8} = 0 \\ \sqrt{\sin x} \cdot \sqrt{2 - y - y^2} = 0 \end{cases}$$

Решение:

В данной задаче сложность состоит в том, чтобы сопоставить область определения с решением системы, задачу можно назвать комбинированной.

Здесь и синус, и косинус, и квадратные уравнения, да ещё и корни.

Найдём область определения уравнения, известно, что подкоренное выражение имеет неотрицательное значение:

Решая неравенство $6x - x^2 + 8 \geq 0$, получаем $2 \leq x \leq 4$

(2 и 4 это радианы, 1 радиан $\approx 57,297^\circ$).

Решая неравенство $2 - y - y^2 > 0$, получаем $-2 \leq y \leq 1$

(-2 и 1 это радианы).

Далее следует цепочка рассуждений:

Первое уравнение равно нулю при $x = 2$ или $x = 4$, но 4 радиана не попадают в область определения выражения $\sqrt{\sin x}$ (так как угол в 4 радиана лежит в третьей четверти, в которой синус отрицателен). Остаётся значение $x = 2$.

При этом значении во втором уравнении выражение $2 - y - y^2$ должно быть равно нулю, так как $\sqrt{\sin 2} \neq 0$

Решаем $2 - y - y^2 = 0$, получаем $y = -2$ или $y = 1$.

При $y = -2$ $\sqrt{\cos y}$ не имеет решения, так как угол в -2 радиана лежит в третьей четверти, а косинус в ней отрицателен.

Значит, решением является пара (2; 1).

Первое уравнение так же равно нулю при $\cos y = 0$, то есть при

$$y = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Но учитывая найденную область определения ($-2 \leq y \leq 1$), получим

$$y = -\frac{\pi}{2}.$$

Во втором уравнении выражение $2 - y - y^2$ при $y = -\frac{\pi}{2}$ не равно нулю, поэтому для того, чтобы оно имело решение, $\sqrt{\sin x}$ должен быть равен 0.

Решаем: $\sqrt{\sin x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Учитывая найденную область определения ($2 \leq x \leq 4$) получаем, что $x = \pi$.

Таким образом, решением системы является ещё одна пара $\left(\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$.

Можно было выстроить рассуждение
следующим образом:

Найдём область допустимых значений, известно, что подкоренное выражение имеет неотрицательное значение:

Решая неравенство $6x - x^2 + 8 \geq 0$, получаем $2 \leq x \leq 4$ (2 и 4 это радианы, 1 радиан $\approx 57,297^\circ$).

Случай 1:

Пусть $x = 2$ или $x = 4$. Если $x = 4$, то $\sin x < 0$; если $x = 2$, то $\sin x > 0$. Из второго уравнения получаем $2 - y - y^2 = 0$, откуда $y = -2$ или $y = 1$.

Случай 2:

Пусть теперь $2 < x < 4$. Тогда $6x - x^2 - 8 > 0$, и поэтому из первого уравнения получаем: $\cos y = 0$.

Учтем, что $2 - y - y^2 \geq 0$. Тогда $-2 \leq y \leq 1$. Из всех решений уравнения $\cos y = 0$ этому условию удовлетворяет только $y = -\frac{\pi}{2}$.

При этом $2 - y - y^2 > 0$ и, из второго уравнения получаем: $\sin x = 0$.

Из всех решений этого уравнения интервалу $2 < x < 4$ принадлежит только $x = \pi$. Значит, $x = \pi, y = -\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\left\{(2; 1); \left(\pi; -\frac{\pi}{2}\right)\right\}$.

484551. Решите уравнение

$$\frac{6\cos^2 x - \cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}} = 0$$

Решение:

Найдём область определения уравнения. Известно, что выражение, стоящее под знаком корня должно быть больше нуля или равно ему (корень из отрицательного числа не извлекается), кроме этого, знаменатель дроби не равен нулю (на ноль делить нельзя). Значит,

$$-\sin x > 0$$

$$\sin x < 0$$

значения синуса отрицательны в третьей и четвёртой четверти, поэтому

$$\pi + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Известно, что дробь равна нулю тогда, когда её числитель равен нулю:

$$6\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$$

В уравнении сделаем замену $\cos x = t$ и решим квадратное уравнение $t^2 - t - 2 = 0$, получим $t = -\frac{1}{2}$ или $t = \frac{2}{3}$.

Таким образом, рассмотрим уравнение:

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

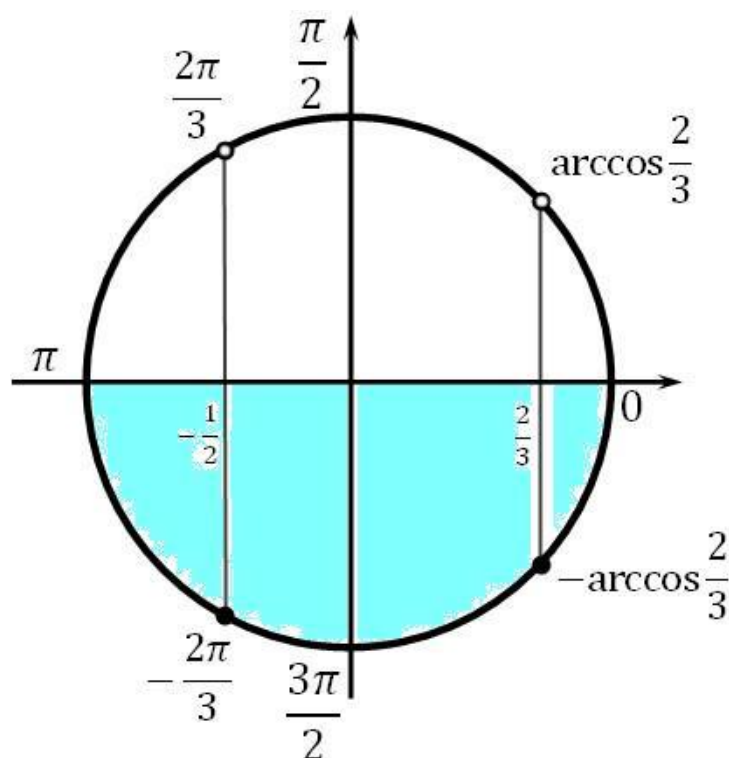
$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим уравнение:

$$\cos x = \frac{2}{3}$$

$$x = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

На тригонометрической окружности найденным корням соответствует четыре точки.



Две из них, находящиеся в верхней полуплоскости, не удовлетворяют условию $\sin x < 0$. Получаем решения:

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \text{ или } x = -\arccos \frac{2}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = -\arccos \frac{2}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

484552. Решите уравнение

$$\frac{4\cos 2x - 9\sin x - 4}{\sqrt{-\cos x}} = 0$$

Решение:

Найдём область определения уравнения. Известно, что выражение, стоящее под знаком корня должно быть больше нуля или равно ему (корень из отрицательного числа не извлекается), кроме этого, знаменатель дроби не равен нулю (на ноль делить нельзя). Значит,

$$-\cos x > 0$$

$$\cos x < 0$$

Значения косинуса отрицательны во второй и третьей четверти:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Известно, что дробь равна нулю тогда, когда её числитель равен нулю:

$$4\cos 2x - 9\sin x - 4 = 0$$

$$4(1 - 2\sin^2 x) - 9\sin x - 4 = 0$$

$$-8\sin^2 x - 9\sin x = 0$$

$$\sin x(8\sin x + 9) = 0$$

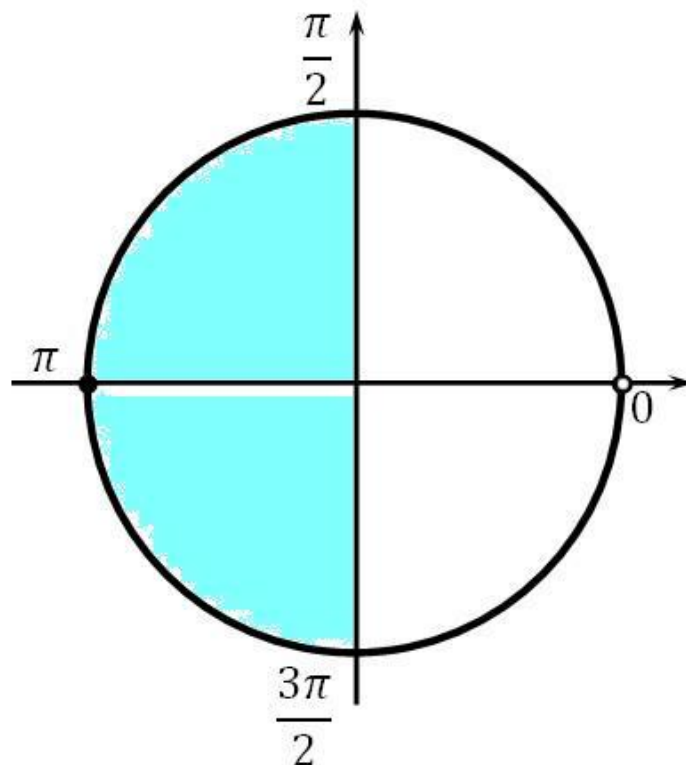
$$\text{Тогда } \sin x = 0 \quad \text{либо} \quad \sin x = -\frac{9}{8}$$

Последнее уравнение не имеет решений, так как значения синуса принадлежат интервалу от -1 до 1 . А из $\sin x = 0$ получим:

$$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

учитывая, что $\cos x < 0$, получаем:

$$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Ответ: $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

484553. Решите уравнение

$$\frac{3\cos 2x + 5\cos x - 1}{\sqrt{-\operatorname{ctg} x}} = 0$$

Решение:

Найдём область допустимых значений уравнения. Известно, знаменатель не равен нулю, кроме того, подкоренное выражение должно быть неотрицательным, значит

$$-\operatorname{ctg} x > 0$$

$$\operatorname{ctg} x < 0$$

тангенс приобретает отрицательные значения во второй и четвёртой четверти.

Известно, что дробь равна нулю тогда, когда её числитель равен нулю:

$$3\cos 2x + 5\cos x - 1 = 0$$

$$3(\cos^2 x - \sin^2 x) + 5\cos x - 1 = 0$$

$$3(2\cos^2 x - 1) + 5\cos x - 1 = 0$$

$$6\cos^2 x + 5\cos x - 4 = 0$$

Произведем замену $\cos x = t$ и решим квадратное уравнение

$$6t^2 + 5t - 4 = 0$$

Получим $t = \frac{1}{2}$ или $t = -\frac{4}{3}$.

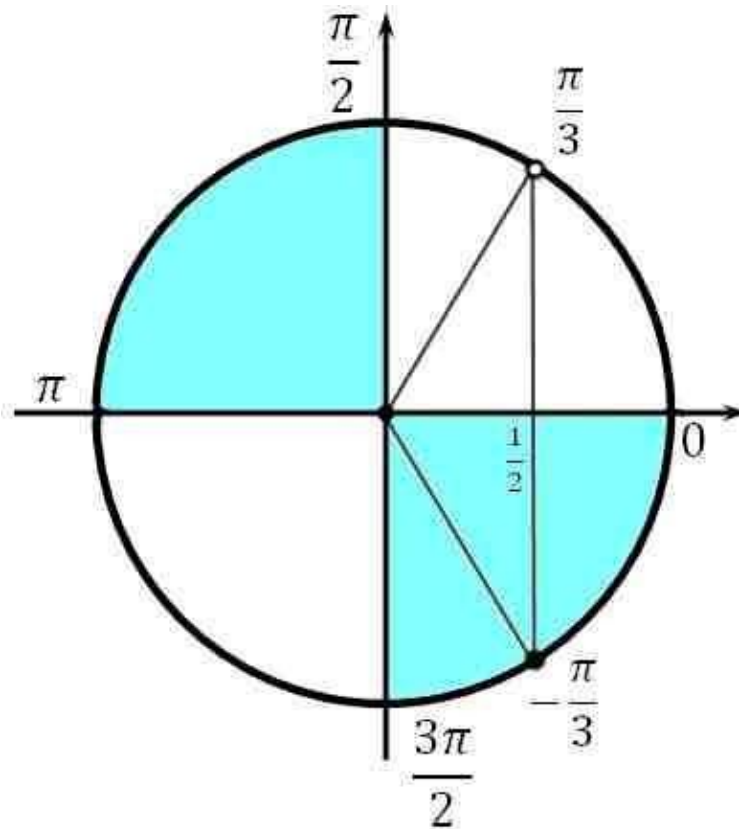
Значит, $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -\frac{4}{3}$.

Уравнение $\cos x = -\frac{4}{3}$ не имеет решений.

Решаем уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$,

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Учитывая, что $\operatorname{ctg} x < 0$, получаем: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

484554. Решите уравнение

$$\frac{3\cos 2x + 7\cos x + 3}{\sqrt{-\sin x}} = 0$$

Решение:

Найдём область допустимых значений уравнения.

Известно, знаменатель не равен нулю, кроме того, подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Значит, $-\sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x < 0$.

Синус приобретает отрицательные значения в третьей и четвёртой четверти.

Известно, что дробь равна нулю тогда, когда её числитель равен нулю:

$$3\cos 2x + 7\cos x + 3 = 0$$

$$3(\cos^2 x - \sin^2 x) + 7\cos x + 3 = 0$$

$$3(2\cos^2 x - 1) + 7\cos x + 3 = 0$$

$$6\cos^2 x + 7\cos x = 0$$

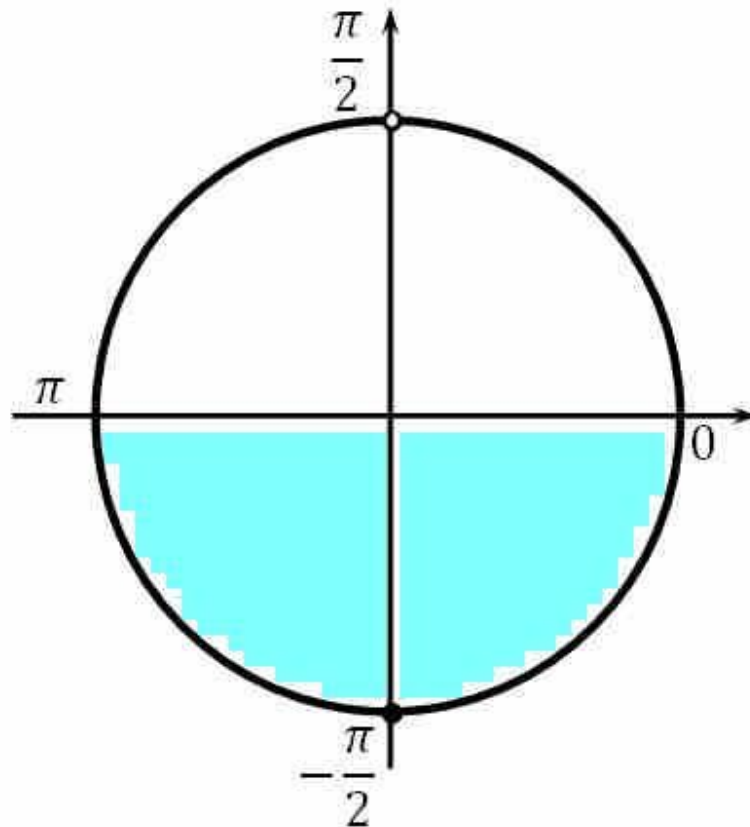
$$\cos x(6\cos x + 7) = 0$$

$$\text{Тогда } \cos x = 0 \quad \text{либо} \quad \cos x = -\frac{7}{6}$$

Уравнение $\cos x = -\frac{7}{6}$ не имеет решений. Решим $\cos x = 0$:

$$x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Учитывая, что $\sin x < 0$, получаем: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

484555. Решите уравнение $(6\sin^2 x + 5\sin x - 4) \cdot \sqrt{-7\cos x} = 0$.

Решение:

Найдём область допустимых значений уравнения.

Подкоренное выражение должно быть неотрицательным, значит

$$-7 \cos x \geq 0$$

$$\cos x \leq 0$$

Таким образом, область определения уравнения будет:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Произведение двух выражений равно нулю, если хотя бы одно из них равно нулю, а другое при этом не теряет смысла, значит:

$$6\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0 \quad \text{либо} \quad \cos x = 0$$

Если $\cos x = 0$, то корнем будет являться

$$x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

данное решение записать следующим образом:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим $6\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0$, оно приводится к квадратному, решая его получим:

$$\sin x = -\frac{4}{3} \quad \text{или} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

Уравнение $\sin x = -\frac{4}{3}$ не имеет решений.

$$\text{Решим} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

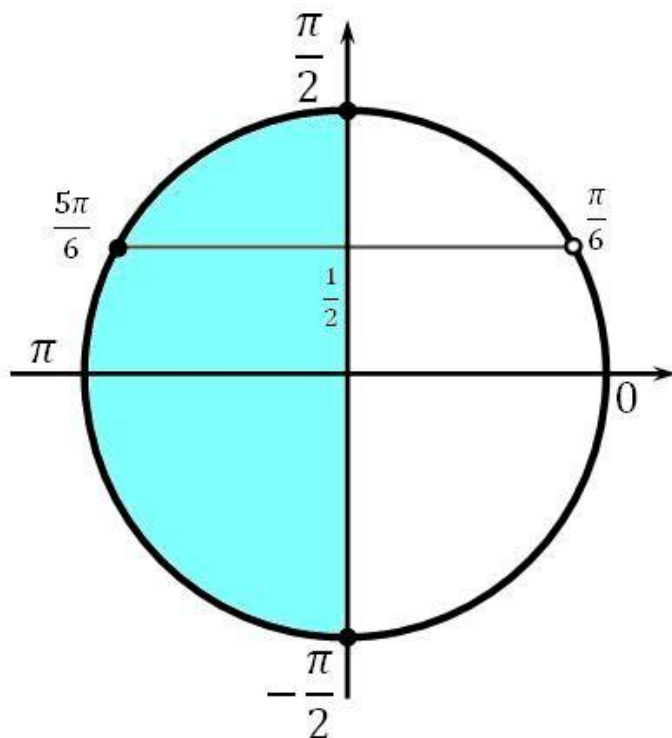
$$x = (-1)^n \arccos \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Мы получили два корня:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Учитывая, что $\cos x \leq 0$, получаем решение:



$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{либо} \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

484556. Решите уравнение $(2\cos^2 x - 5\cos x + 2) \cdot \log_{11}(-\sin x) = 0$.

Решение:

Найдём область определения уравнения.

По определению логарифма выражение под знаком логарифма больше нуля, значит

$$-\sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x < 0$$

Отрицательные значения синус приобретает тогда, когда x принадлежит интервалу от π до 2π с периодом в $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ или другими словами, когда угол лежит в третьей или четвёртой четверти.

Произведение двух выражений равно нулю, если хотя бы одно из них равно нулю, а другое при этом не теряет смысла, значит

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \quad \text{либо} \quad \log_{11}(-\sin x) = 0$$

Из уравнения $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$ следует, что

$$\cos x = 2 \quad \text{или} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

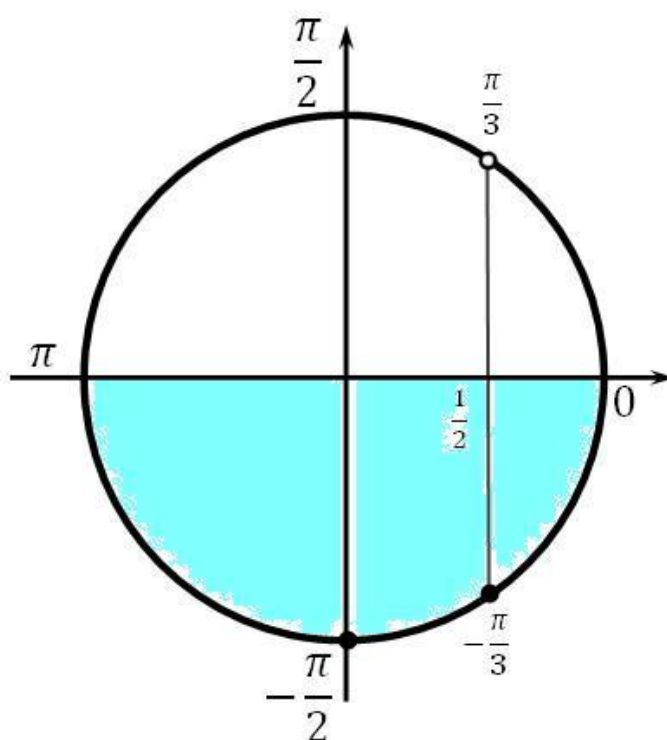
Из уравнения $\log_{11}(-\sin x) = 0$ следует, что $\sin x = -1$.

Уравнение $\cos x = 2$ не имеет решений.

$$\text{Решаем } \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Решаем } \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Учитывая область определения ($\sin x < 0$), получаем корни:



$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

484557. Решите уравнение $(2\sin x + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{\cos x} = 0$.

Решение:

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x \geq 0$.

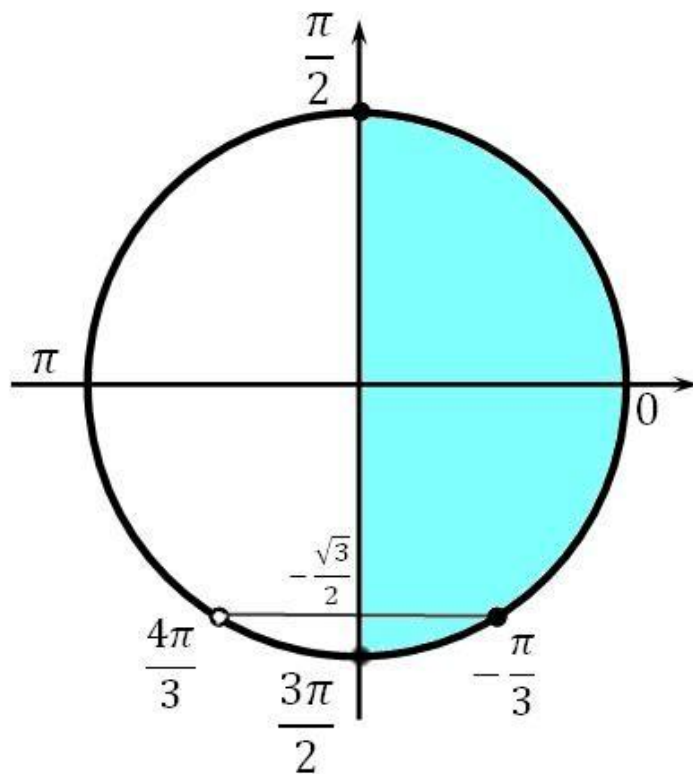
Если $\cos x = 0$, то $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ или по-другому $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Если $\cos x > 0$, то $2\sin x + \sqrt{3} = 0$, откуда $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решая уравнение, получаем:

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Учитывая, что $\cos x > 0$ (x лежит в первой либо четвёртой четверти), получаем решение:



$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Корень $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ не является решением, так как лежит в третьей четверти.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

485932. Дано уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$.

а) Решите уравнение

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

Решение:

а) Используем формулу приведения и синуса двойного угла:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$$

$$\sin 2x = \cos x$$

$$2\sin x \cos x = \cos x$$

$$2\sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x (2\sin x - 1) = 0$$

$$\text{Тогда } \cos x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

Решая $\cos x = 0$, получим:

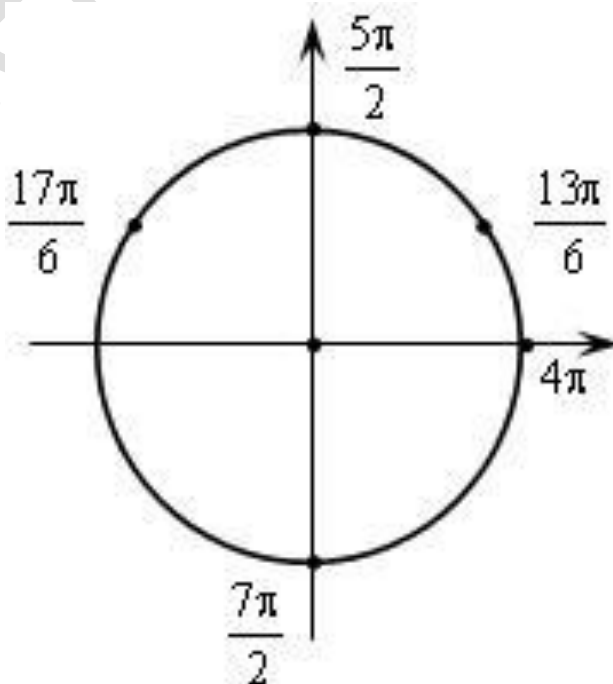
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Решая $\sin x = \frac{1}{2}$, получим:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Таким образом: } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.



Находим:

$$\frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$$

Без расчётов, визуально сходу определить корни принадлежащие отрезку может далеко не каждый, нужна серьёзная практика, поэтому покажем безошибочный способ отбора корней, которым советуем пользоваться:

переведём радианы в градусы. Так как π радиан это 180° , то отрезок $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ будет выглядеть следующим образом: $[450^\circ; 720^\circ]$. Отберём корни, подставляя значения k в полученное решение уравнения:

При $k = 1$:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{13\pi}{6} = 390^\circ$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{5\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{17\pi}{6} = 510^\circ$$

При $k = 2$:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} = 450^\circ$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{24\pi}{6} = \frac{25\pi}{6} = 750^\circ$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 4\pi = \frac{5\pi}{6} + \frac{24\pi}{6} = \frac{29\pi}{6} = 870^\circ$$

При $k = 3$:

$$x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{6\pi}{2} = \frac{7\pi}{2} = 630^\circ$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 6\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{36\pi}{6} = \frac{37\pi}{6} = 1100^\circ$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + \frac{36\pi}{6} = \frac{41\pi}{6} = 1230^\circ$$

При $k = 4$ проверять корни нет смысла, так как видно, что результат будет лежать вне пределов интервала: $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi > 720^\circ$

Отрезку $[450^\circ; 720^\circ]$ принадлежат корни $390^\circ; 450^\circ; 510^\circ$, в радианах это $\frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$. Ответ можно записывать либо в градусах, либо радианах, значения не имеет.

Ответ:

а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) $\frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$.

485942. Дано уравнение $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = \sin x$.

а) Решите уравнение;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) По формуле приведения и формуле косинуса двойного угла:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) &= \sin x \\ -\cos 2x &= \sin x \\ -(\cos^2 x - \sin^2 x) &= \sin x \\ -(1 - \sin^2 x - \sin^2 x) &= \sin x \\ 2\sin^2 x - \sin x - 1 &= 0\end{aligned}$$

Решая квадратное уравнение, получим:

$$\text{Тогда } \sin x = 1 \quad \text{либо} \quad \sin x = -\frac{1}{2}$$

Решая $\sin x = 1$, получим:

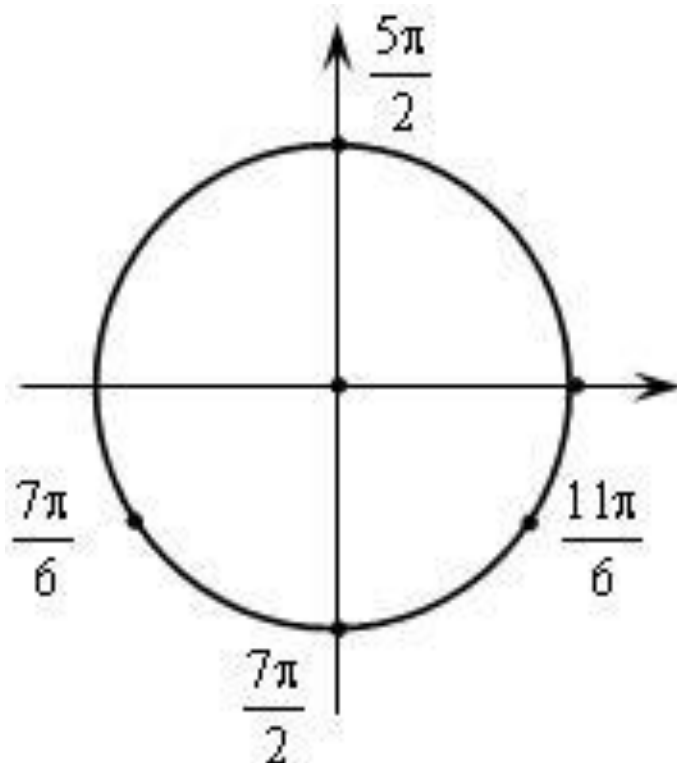
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решая $\sin x = -\frac{1}{2}$, получим:

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

получили корни $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.



Это числа $\frac{5\pi}{2}$ и $\frac{11\pi}{6}$.

Без расчётов, визуально сходу определить корни принадлежащие отрезку может далеко не каждый, поэтому советуем использовать следующий способ отбора корней. Если в расчётах вы не ошибётесь, то верный ответ гарантирован: переведём радианы в градусы. Так как π радиан это 180° , то отрезок $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ будет выглядеть следующим образом: $[270^\circ; 450^\circ]$.

Отберём корни:

При $k = 1$:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} = 450^\circ$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = -\frac{\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} = 330^\circ$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = -\frac{5\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} = 210^\circ$$

При $k = 2$:

$$x = \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{8\pi}{2} = \frac{9\pi}{2} = 810^\circ$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 4\pi = -\frac{\pi}{6} + \frac{24\pi}{6} = \frac{23\pi}{6} = 690^\circ$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 4\pi = -\frac{5\pi}{6} + \frac{24\pi}{6} = \frac{19\pi}{6} = 570^\circ$$

При $k = 3$ и далее можно не проверять, так как уже видно, что при $k = 2$ углы лежат вне пределов интервала.

Таким образом, отрезку $[270^\circ; 450^\circ]$ принадлежат корни 450° и 330° , в радианах это $\frac{5\pi}{2}$ и $\frac{11\pi}{6}$.

Ответ:

а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) $\frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$.

485964. а) Решите уравнение $\sin x + \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right) \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) Преобразуем уравнение:

$$\sin x + \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\sin x + \cos x = 0$$

Если $\cos x = 0$, то из уравнения следует $\sin x = 0$, что невозможно. Значит, на множестве корней уравнения $\cos x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos x$:

$$\operatorname{tg} x + 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

б) Найдем корни, лежащие на заданном отрезке. Выразим данный интервал в градусах. Так как π радиан это 180° , то отрезок $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ будет выглядеть следующим образом: $[180^\circ; 450^\circ]$. Отберём корни:

При $k = 0$:

$$x = -\frac{\pi}{4} + 0 = -45^\circ$$

При $k = 1$:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$$

При $k = 2$:

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = -\frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} = 315^\circ$$

При $k = 3$:

$$x = -\frac{\pi}{4} + 3\pi = -\frac{\pi}{4} + \frac{12\pi}{4} = \frac{11\pi}{4} = 495^\circ$$

Таким образом, отрезку $[180^\circ; 450^\circ]$ принадлежит один корень 315° или $\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4}$.

485965. а) Решите уравнение $\cos x = \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2 - 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение:

а) Преобразуем уравнение:

$$\cos x = \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)^2 - 1$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$\cos x = 1 - 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} - 1$$

$$\cos x = -2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$$

$$\cos x = -\sin x \quad \left| \cdot \frac{1}{\sin x} \right.$$

$$\operatorname{tg} x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

б) Найдем корни, лежащие на заданном отрезке. Выразим данный интервал в градусах. Так как π радиан это 180° , то отрезок $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi \right]$ будет выглядеть следующим образом: $[90^\circ; 360^\circ]$. Отберём корни:

При $k = 0$:

$$x = -\frac{\pi}{4} + 0 = -45^\circ$$

При $k = 1$:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$$

При $k = 2$:

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = -\frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} = 315^\circ$$

При $k = 3$:

$$x = -\frac{\pi}{4} + 3\pi = -\frac{\pi}{4} + \frac{12\pi}{4} = \frac{11\pi}{4} = 495^\circ$$

Таким образом, отрезку $[90^\circ; 360^\circ]$ принадлежат корни 135° и 315° , в радианной мере это $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.

Можно определить корни, принадлежащие заданному интервалу, другим способом. Составим двойное неравенство:

$$\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} + \pi k < 2\pi$$

$$\text{откуда } \frac{3}{4} < k < 2\frac{1}{4}$$

Следовательно, $k = 1$ или $k = 2$, тогда искомые корни:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ \quad \text{и} \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4} = 315^\circ$$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.

485973. Дано уравнение $2\sin 2x = 4\cos x - \sin x + 1$.

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) Преобразуем уравнение:

$$4\sin x \cos x - 4\cos x + \sin x - 1 = 0$$

$$4\cos x (\sin x - 1) + (\sin x - 1) = 0$$

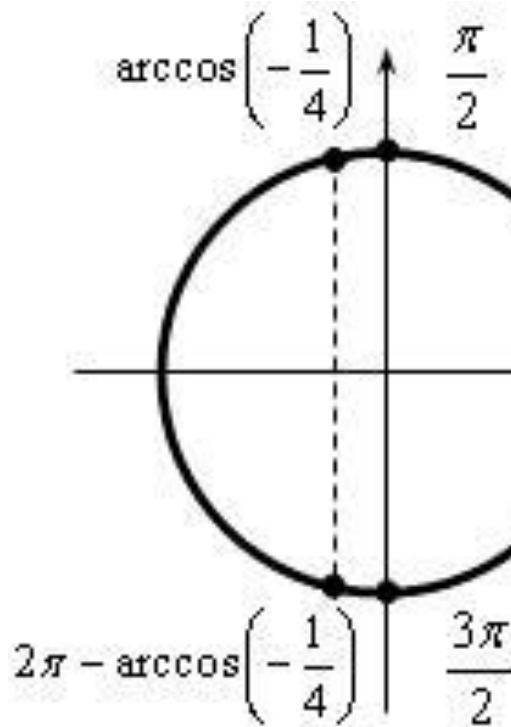
$$(\sin x - 1)(4\cos x + 1) = 0$$

$$\sin x - 1 = 0 \quad \text{либо} \quad 4\cos x + 1 = 0$$

$$\text{Получаем: } \sin x = 1 \quad \text{или} \quad \cos x = -\frac{1}{4}$$

$$\text{откуда } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \text{или} \quad x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

б) С помощью числовой окружности отберем корни на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, в данной задаче это можно сделать визуально без каких-либо дополнительных расчётов:



Заданному интервалу принадлежат корни:

$$\frac{\pi}{2}, \quad \arccos\left(-\frac{1}{4}\right), \quad -\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$$

Можно записать следующим образом:

$$\frac{\pi}{2}, \quad \arccos\left(-\frac{1}{4}\right), \quad 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$$

Ответ:

а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

б) $\frac{\pi}{2}, \arccos\left(-\frac{1}{4}\right), 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{4}\right).$

485977. а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Разложим левую часть на множители:

$$2\sin x \cos x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos x = 0$$

$$2\sin x (\cos x - 4) - 2\sqrt{3}\cos x (\cos x - 2) = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{2} \right.$$

$$\sin x (\cos x - 4) - \sqrt{3}\cos x (\cos x - 2) = 0$$

$$(\cos x - 2)(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0$$

Уравнение $\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 2$, оно не имеет корней.

Значит

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$$

Если в этом уравнении $\cos x = 0$, то $\sin x = 0$, а это невозможно. Это однородное уравнение первой степени, разделим обе его части на $\cos x$.

Получаем:

$$\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

б) Найдём корни, лежащие на заданном отрезке. Выразим данный интервал в градусах. Так как π радиан это 180° , то отрезок $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ будет выглядеть следующим образом: $[180^\circ; 450^\circ]$. Отберём корни:

При $k = 0$:

$$x = \frac{\pi}{3} + 0 = 60^\circ$$

При $k = 1$:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} = 240^\circ$$

При $k = 2$:

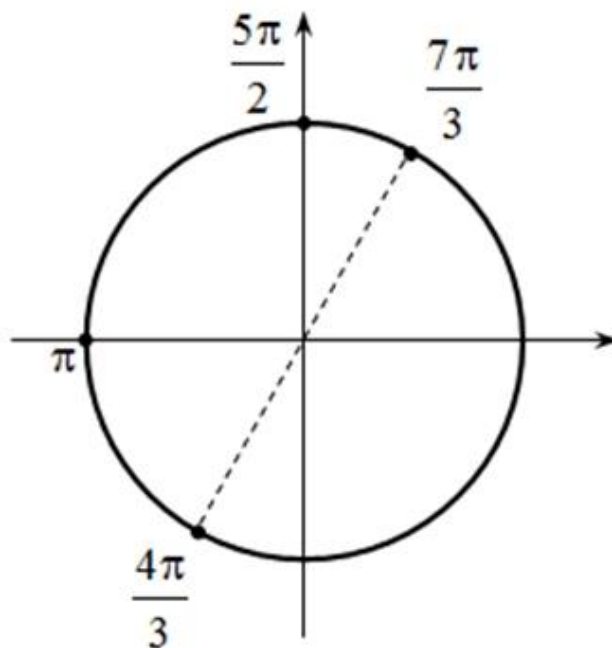
$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{7\pi}{3} = 420^\circ$$

При $k = 3$:

$$x = \frac{\pi}{3} + 3\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{9\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} = 600^\circ$$

Таким образом, отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни 240° и 420° , в радианах

это $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{7\pi}{3}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, б) $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{7\pi}{3}$.

485986. а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3}\sin^2 x + 4\cos x - 4\sqrt{3}\sin x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Решение:

а) Преобразуем уравнение и разложим левую часть на множители:

$$2\sin x \cos x - 2\sqrt{3}\sin^2 x + 4\cos x - 4\sqrt{3}\sin x = 0$$

$$2\cos x(\sin x + 2) - 2\sqrt{3}\sin x(\sin x + 2) = 0$$

$$\cos x(\sin x + 2) - \sqrt{3}\sin x(\sin x + 2) = 0$$

$$(\sin x + 2)(\cos x - \sqrt{3}\sin x) = 0$$

Уравнение $\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -2$, оно не имеет корней.

Уравнение $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$ является однородным тригонометрическим уравнением первой степени. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{3}\cos x$.
Получаем:

$$\operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

б) Выразим данный интервал в градусах. Так как π радиан это 180° , то отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ будет выглядеть следующим образом: $[-90^\circ; 180^\circ]$.

Отберём корни:

При $k = -1$:

$$x = \frac{\pi}{6} - \pi = \frac{\pi}{3} - \frac{6\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} = -300^\circ$$

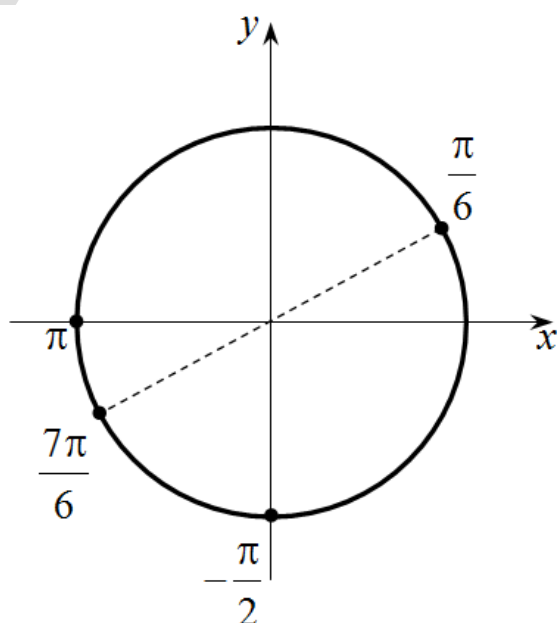
При $k = 0$:

$$x = \frac{\pi}{6} + 0 = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

При $k = 1$:

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{\pi}{6} + \frac{6\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} = 210^\circ$$

Таким образом, отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ принадлежит только $\frac{\pi}{6}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, б) $\frac{\pi}{6}$.

485987. а) Решите уравнение $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = \cos 2x$.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение:

а) Преобразуем уравнение:

$$-\cos x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$-\cos x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

$$-\cos x = 2\cos^2 x - 1$$

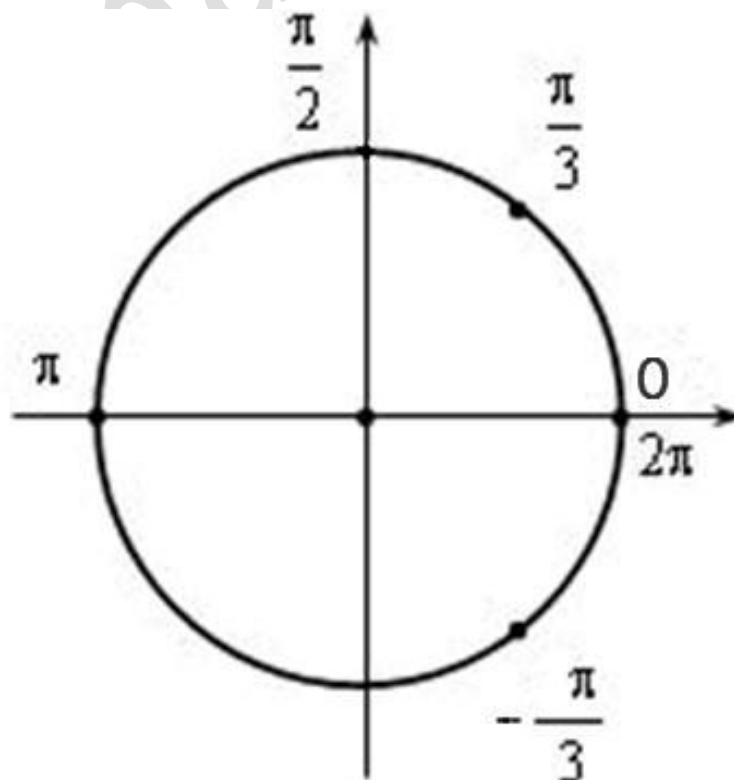
$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

Решая квадратное уравнение, получим:

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{либо} \quad \cos x = -1$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{либо} \quad x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Изобразим корни на тригонометрической окружности:



Видно, что они распределены по окружности с периодичностью в 120 градусов (это $\frac{2\pi}{3}$) относительно друг друга.

Поэтому решение можно записать:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

б) Выразим данный интервал в градусах. Так как π радиан это 180° , то отрезок $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ будет выглядеть следующим образом: $[90^\circ; 360^\circ]$.

Отберём корни:

При $k = 1$:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot 1 = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

При $k = 2$:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot 2 = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi = 180^\circ$$

При $k = 3$:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot 3 = \frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} = 300^\circ$$

При $k = 4$:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot 4 = \frac{8\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3} = 420^\circ$$

Таким образом, отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ принадлежат корни 180° и 300° в радианах это π и $\frac{5\pi}{3}$.

Находить корни, принадлежащие отрезку, так же можно подставляя значения k в найденные корни:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Результат, конечно же, будет тот же.

Форма ответа может быть разная. Покажем варианты записи ответов.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$; б) $\pi; \frac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\pi; \frac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\pi; \frac{5\pi}{3}$.

485991. а) Решите уравнение

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)$$

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

Решение:

а) Преобразуем уравнение, используя формулу косинуса двойного аргумента и формулу приведения для синуса, получаем

$$\cos x = \cos 2x$$

$$\cos x - (2\cos^2 x - 1) = 0$$

$$\cos x - 2\cos^2 x + 1 = 0$$

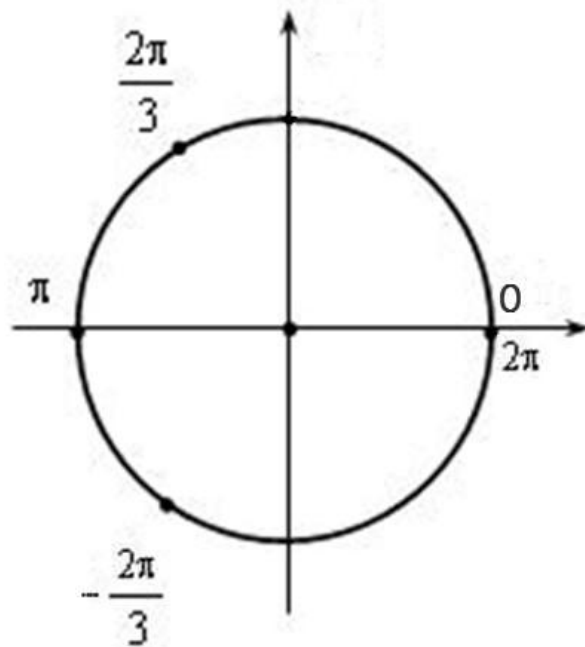
$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Решая квадратное уравнение, получим:

$$\cos x = 1 \quad \text{либо} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{либо} \quad x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Изобразим корни на тригонометрической окружности:



Видно, что они распределены по окружности со сдвигом (периодичностью) на 120 градусов относительно друг друга, то есть на $\frac{2\pi}{3}$. Поэтому решение можно записать:

$$x = \frac{2\pi}{3} \cdot k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

б) Выразим данный интервал в градусах. Так как π радиан это 180° , то отрезок $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ будет выглядеть следующим образом: $[180^\circ; 450^\circ]$.

Отберём корни:

При $k = 1$:

$$x = \frac{2\pi}{3} \cdot 1 = \frac{\pi}{3} = 120^\circ$$

При $k = 2$:

$$x = \frac{2\pi}{3} \cdot 2 = \frac{4\pi}{3} = 240^\circ$$

При $k = 3$:

$$x = \frac{2\pi}{3} \cdot 3 = 2\pi = 360^\circ$$

При $k = 4$:

$$x = \frac{2\pi}{3} \cdot 4 = \frac{8\pi}{3} = 480^\circ$$

Таким образом, отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{4\pi}{3}$ и 2π .

Ответ можно записать следующим образом:

Ответ: а) $\frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{4\pi}{3}; 2\pi$.

Ответ: а) $x = 2\pi k, x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{4\pi}{3}; 2\pi$.

Ответ: а) $x = 2\pi k, x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{4\pi}{3}; 2\pi$.

485996. Дано уравнение $\sin 2x = 2\sin x - \cos x + 1$.

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin x \cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$$

$$2\sin x (\cos x - 1) + \cos x - 1 = 0$$

$$(\cos x - 1)(2\sin x + 1) = 0$$

Получаем:

$$\cos x = 1 \quad \text{или} \quad \sin x = -\frac{1}{2}$$

Решая $\cos x = 1$, получим $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Решая $\sin x = -\frac{1}{2}$, получим

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{или} \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

б) Выразим данный интервал в градусах. Так как π радиан это 180° , то отрезок $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ будет выглядеть следующим образом: $[-360^\circ; -90^\circ]$.

Отберём корни:

При $k = 0$:

$$x = 2\pi \cdot 0 = 360^\circ$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 0 = -\frac{\pi}{6} = -30^\circ$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot 0 = -\frac{5\pi}{6} = -150^\circ$$

При $k = 1$:

$$x = 2\pi \cdot 1 = 360^\circ$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} = 330^\circ$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot 1 = -\frac{5\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} = 210^\circ$$

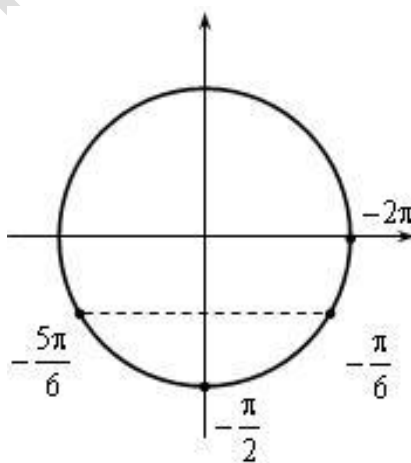
При $k = -1$:

$$x = 2\pi(-1) = -2\pi = -360^\circ$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi(-1) < -360^\circ$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi(-1) < -360^\circ$$

С помощью числовой окружности отметим корни на отрезке $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.



Отрезку $[-360^\circ; -90^\circ]$ принадлежат корни: -360° и -150° , в радианах это соответственно -2π и $-\frac{5\pi}{6}$.

Ответ:

а) $2\pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

б) $-2\pi, -\frac{5\pi}{6}.$

500000. Дано уравнение

$$2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3$$

а) Решите данное уравнение.

б) Укажите корни данного уравнения, принадлежащие промежутку

$$\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right].$$

а) Никаких ограничений по области определения нет. Сведем уравнение к квадратному относительно тангенса:

$$2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3$$

$$2\cos^2 x - 2 + 2 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 1$$

$$2(\cos^2 x - 1) + 4 \cdot \sin x \cdot \cos x = 1$$

$$-2\sin^2 x + 4 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$-3\sin^2 x + 4 \cdot \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$$

$$3\sin^2 x - 4 \cdot \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right.$$

$$3\operatorname{tg}^2 x - 4 \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 0$$

Решая квадратное уравнение получим два корня:

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$$

Если $\operatorname{tg} x = 1$, то

$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Если $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$, то

$$x = \arctg \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

б) Сходу, без построения единичной окружности или без вычислений определить корни принадлежащие данному промежутку непросто. Поэтому, поступим следующим образом: переведём радианы в градусы. Так как π радиан это 180° , то отрезок $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$ будет выглядеть следующим образом: $[-270^\circ; -90^\circ]$. Отберём корни, подставляя значения k в полученное решение уравнения (число k следует брать в диапазоне от -2 до 2 , смысл в том, что необходимо получить все углы, которые принадлежат промежутку):
При $k = -2$:

$$x = \frac{\pi}{4} - 2\pi = \frac{\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4} = -315^\circ \text{ (не принадлежит)}$$

Рассмотрим $x = \arctg \frac{1}{3} - 2\pi$, угол $\arctg \frac{1}{3}$ лежит в пределах от 0 до 45 градусов. Значит, угол $\arctg \frac{1}{3} - 2\pi$ лежит в пределах от -360 до -315 градусов. Это означает, что промежутку $[-270^\circ; -90^\circ]$ он не принадлежит.

При $k = -1$:

$$x = \frac{\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4} - \frac{4\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} = -135^\circ \text{ (принадлежит)}$$

Рассмотрим $x = \arctg \frac{1}{3} - \pi$, угол $\arctg \frac{1}{3}$, как уже сказано, лежит в пределах от 0 до 45 градусов.

Значит, угол $\arctg \frac{1}{3} - \pi$ лежит в пределах от -180 до -135 градусов. Это означает, что он принадлежит промежутку $[-270^\circ; -90^\circ]$.

При $k = 0$:

$$x = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \text{ (не принадлежит)}$$

Рассмотрим $x = \arctg \frac{1}{3}$, он лежит в пределах от 0 до 45 градусов, то есть данному интервалу он не принадлежит.

Из найденных решений промежутку принадлежат корни:

$$-\frac{3\pi}{4}; \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \pi$$

Ответ:

$$\text{а) } x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{б) } -\frac{3\pi}{4}; \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \pi$$

500006. Дано уравнение

$$6\sin^2 x + \sin 2x = 2$$

а) Решите данное уравнение.

б) Укажите корни данного уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

а) В левой части воспользуемся формулой синуса двойного аргумента, а в правой основным тригонометрическим тождеством, преобразуем:

$$6\sin^2 x + \sin 2x = 2$$

$$6\sin^2 x + \sin 2x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$6\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$$

$$6\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0$$

$$4\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$$

Приведём к квадратному относительно тангенса:

$$4\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{2\cos^2 x} \right.$$

$$2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0$$

Решая квадратное уравнение получим:

$$\operatorname{tg} x = -1 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$$

Если $\operatorname{tg} x = -1$, то

$$x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Если $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, то

$$x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

б) Сходу, без построения единичной окружности или без вычислений определить корни принадлежащие данному промежутку непросто. Поэтому, поступим следующим образом: переведём радианы в градусы. Так как π радиан это 180° , то отрезок $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ будет выглядеть следующим образом: $[270^\circ; 450^\circ]$. Отберём корни, подставляя значения k в полученное решение уравнения (число k следует брать в диапазоне от -2 до 2 , смысл в том, что необходимо получить все углы, которые принадлежат промежутку):

При $k = 1$:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ \text{ (не принадлежит)}$$

Рассмотрим $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi$, угол $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ лежит в пределах от 0 до 45 градусов. Значит, угол $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi$ лежит в пределах от 180 до 225 градусов. Это означает, что промежутку $[270^\circ; 450^\circ]$ он не принадлежит.

При $k = 2$:

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = -\frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} = 315^\circ \text{ (принадлежит)}$$

Рассмотрим $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi$, угол $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$, как уже сказано, лежит в пределах от 0 до 45 градусов.

Значит, угол $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi$ лежит в пределах от 360 до 405 градусов. Это означает, что он принадлежит промежутку $[270^\circ; 450^\circ]$.

При $k = 3$:

$$x = -\frac{\pi}{4} + 3\pi = -\frac{\pi}{4} + \frac{12\pi}{4} = \frac{11\pi}{4} = 495^\circ \text{ (не принадлежит)}$$

Рассмотрим $x = \arctg \frac{1}{2} + 3\pi$, угол $\arctg \frac{1}{2}$, как уже сказано, лежит в пределах от 0 до 45 градусов.

Значит, угол $\arctg \frac{1}{2} + 3\pi$ лежит в пределах от 540 до 585 градусов. Это означает, что он не принадлежит промежутку $[270^\circ; 450^\circ]$.

Из найденных решений промежутку принадлежат корни:

$$\frac{7\pi}{4}; \arctg \frac{1}{2} + 2\pi$$

Ответ:

а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, x = \arctg \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{7\pi}{4}; \arctg \frac{1}{2} + 2\pi$

500012. Дано уравнение $\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3$.

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

а) Решим уравнение: $\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3$

Сразу отметим, что выражение стоящее под знаком логарифма, по его определению, должно быть больше нуля. В данном случае, выражение $\cos x + \sin 2x + 8$ будет больше нуля при любом x . Почему? Чему бы не был равен x , выражение $\cos x + \sin 2x$, в любом случае, менее, чем -2 не будет. Таким образом, никаких ограничений по области определения нет.

Итак, по основному логарифмическому тождеству:

$$\cos x + \sin 2x + 8 = 2^3$$

$$\cos x + \sin 2x + 8 = 8$$

$$\cos x + \sin 2x = 0$$

$$\cos x + 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\cos x (2 \sin x + 1) = 0$$

Произведение двух выражений равно нулю, если хотя бы одно из них равно нулю, а другое при этом не теряет смысла, значит

$$\cos x = 0 \quad \text{либо} \quad 2\sin x + 1 = 0$$

Решаем $\cos x = 0$, получим:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем $\sin x = -0,5$, получим

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Краткая форма записи решения:

$$\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3 \Leftrightarrow \cos x + \sin 2x + 8 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Найдём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ещё раз запишем их:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Используем следующий способ. Переведём радианы в градусы. Так как π радиан это 180° , то отрезок $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ будет выглядеть следующим образом: $[270^\circ; 540^\circ]$. Отберём корни, подставляя значения k в полученное решение уравнения. Число k следует брать в диапазоне от -2 до 2 , смысл в том, что необходимо получить (определить) все углы, которые принадлежат отрезку, сначала возьмём $k = 0$:

При $k = 0$:

$$x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 90^\circ$$

$$x = -\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 30^\circ$$

$$x = \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow 210^\circ$$

При $k = 1$:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 270^\circ$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = -\frac{\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow 330^\circ$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{19\pi}{6} \Leftrightarrow 570^\circ$$

При $k = 2$:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow 450^\circ$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 4\pi = -\frac{\pi}{6} + \frac{24\pi}{6} = \frac{23\pi}{6} \Leftrightarrow 690^\circ$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + 4\pi = \frac{7\pi}{6} + \frac{24\pi}{6} = \frac{31\pi}{6} \Leftrightarrow 930^\circ$$

Из расчётов понятно, что отрицательные значения k в данном случае брать нет смысла. Из всех полученных корней отрезку $[270^\circ; 540^\circ]$ принадлежат углы 270, 330 и 450 градусов. В радианах это:

$$\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}$$

Конечно, необходимо в совершенстве владеть техникой перевода радиан в градусы и обратно.

Ответ:

а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}.$

500018. Дано уравнение $\log_4(\sin x + \sin 2x + 16) = 2$.

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

а) Сразу отметим, что выражение стоящее под знаком логарифма, по его определению, должно быть больше нуля. В данном случае, выражение $\sin x + \sin 2x + 16$ будет больше нуля при любом x . Почему? Чему бы не был равен x , выражение $\sin x + \sin 2x$, в любом случае, менее, чем -2 не будет. Таким образом, никаких ограничений по области определения нет.

Итак, по основному логарифмическому тождеству:

$$\sin x + \sin 2x + 16 = 4^2$$

$$\sin x + \sin 2x + 16 = 16$$

$$\sin x + \sin 2x = 0$$

$$\sin x + 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x (2 \cos x + 1) = 0$$

Произведение двух выражений равно нулю, если хотя бы одно из них равно нулю, а другое при этом не теряет смысла, значит

$$\sin x = 0 \quad \text{либо} \quad 2 \cos x + 1 = 0$$

Решаем $\sin x = 0$, получим:

$$x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем $\cos x = -0,5$, получим:

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Краткая форма записи решения:

$$\begin{aligned} \log_4(\sin x + \sin 2x + 16) = 2 &\Leftrightarrow \sin x + \sin 2x + 16 = 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0; \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k; \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ещё раз запишем корни:

$$x = \pi k; \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Используем следующий способ. Переведём радианы в градусы. Так как π радиан это 180° , то отрезок $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$ будет выглядеть следующим образом: $[-720^\circ; -450^\circ]$. Отберём корни, подставляя значения k в полученное решение уравнения. Число k следует брать в диапазоне от -2 до 2 , смысл в том, что необходимо получить (определить) все углы, которые принадлежат отрезку, сначала возьмём $k = 0$:

При $k = 0$:

$$x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0^\circ$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 120^\circ$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -120^\circ$$

При $k = -1$:

$$x = -\pi \quad \Leftrightarrow \quad -180^\circ$$

$$x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = \frac{2\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -240^\circ$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = -\frac{8\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -480^\circ$$

При $k = -2$:

$$x = -2\pi \quad \Leftrightarrow \quad -360^\circ$$

$$x = \frac{2\pi}{3} - 4\pi = \frac{2\pi}{3} - \frac{12\pi}{3} = -\frac{10\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -600^\circ$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} - 4\pi = -\frac{2\pi}{3} - \frac{12\pi}{3} = -\frac{14\pi}{3} \Leftrightarrow -840^\circ$$

При $k = -3$:

$$x = -3\pi \Leftrightarrow -540^\circ$$

$$x = \frac{2\pi}{3} - 6\pi = \frac{2\pi}{3} - \frac{18\pi}{3} = -\frac{16\pi}{3} \Leftrightarrow -960^\circ$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} - 6\pi = -\frac{2\pi}{3} - \frac{18\pi}{3} = -\frac{20\pi}{3} \Leftrightarrow -1200^\circ$$

При $k = -4$ проверим только первый корень, остальные нет смысла (они уже вышли за пределы интервала при $k = -3$):

$$x = -4\pi \Leftrightarrow -720^\circ$$

Понятно, что положительные значения k в данном случае брать нет смысла.

Из всех полученных корней отрезку $[-720^\circ; -450^\circ]$ принадлежат корни:

$-720^\circ; -600^\circ; -540^\circ$ и -480° градусов. В радианах это:

$$-4\pi; \quad -\frac{10\pi}{3}; \quad -3\pi; \quad -\frac{8\pi}{3}$$

Конечно, для использования этого подхода необходимо в совершенстве владеть техникой перевода радиан в градусы и обратно.

Ответ:

а) $\pi k, \quad \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

б) $-4\pi, \quad -\frac{10\pi}{3}, \quad -3\pi, \quad -\frac{8\pi}{3}.$

500063. Дано уравнение $4\cos^3 x + 3\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

а) Воспользуемся формулой приведения для синуса, далее вынесем общий множитель за скобку:

$$4\cos^3 x - 3\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (4\cos^2 x - 3) = 0$$

Значит,

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad \cos^2 x = \frac{3}{4}$$

Решением уравнения $\cos x = 0$ будет корень $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Из $\cos^2 x = \frac{3}{4}$ следует, что $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Решением уравнения являются корни:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{6} + 2\pi k, & x &= -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, & k &\in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, & x &= -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, & k &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Или можем записать:

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Получили три корня:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

б) Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

Составим двойное неравенство. Суть способа заключается в следующем:

1. Берём один из корней (полученный в пункте а).
2. Составляем двойное неравенство (искомый корень принадлежит отрезку).
3. Решаем это неравенство.
4. Находим коэффициент(ы).
5. Подставляем найденный коэффициент(ты) обратно в корень и вычисляем.

Так поступаем с каждым полученным корнем (из пункта а). Итак:

Первый корень:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$-2\pi \leq \frac{\pi}{2} + \pi k \leq -\pi$$

$$-2\pi \leq \frac{\pi}{2} + \pi k \leq -\pi \quad \Bigg| \quad -\frac{\pi}{2}$$

$$-2\pi - \frac{\pi}{2} \leq \pi k \leq -\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$-2,5\pi \leq \pi k \leq -1,5\pi \quad \Bigg| \quad \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$-2,5 \leq k \leq -1,5$$

Так число k целое, то $k = -2$

Находим корень, принадлежащий отрезку:

$$x = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$$

Следующий корень:

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$-2\pi \leq \frac{\pi}{6} + \pi k \leq -\pi$$

$$-2\pi \leq \frac{\pi}{6} + \pi k \leq -\pi \quad \Bigg| \quad -\frac{\pi}{6}$$

$$-2\pi - \frac{\pi}{6} \leq \pi k \leq -\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{13\pi}{6} \leq \pi k \leq -\frac{7\pi}{6} \quad \Bigg| \quad \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$-\frac{13}{6} \leq k \leq -\frac{7}{6}$$

$$-2\frac{1}{6} \leq k \leq -1\frac{1}{6}$$

Так число k целое, то $k = -2$

Находим корень, принадлежащий отрезку:

$$x = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$$

Следующий корень:

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$-2\pi \leq -\frac{\pi}{6} + \pi k \leq -\pi$$

$$-2\pi \leq -\frac{\pi}{6} + \pi k \leq -\pi \quad \Big| +\frac{\pi}{6}$$

$$-2\pi + \frac{\pi}{6} \leq \pi k \leq -\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{11\pi}{6} \leq \pi k \leq -\frac{5\pi}{6} \quad \Big| \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$-\frac{11}{6} \leq k \leq -\frac{5}{6}$$

$$-1\frac{5}{6} \leq k \leq -\frac{5}{6}$$

Так как число k целое, то $k = -1$.

Находим корень принадлежащий отрезку:

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi(-1) = -\frac{7\pi}{6}$$

Получили три корня:

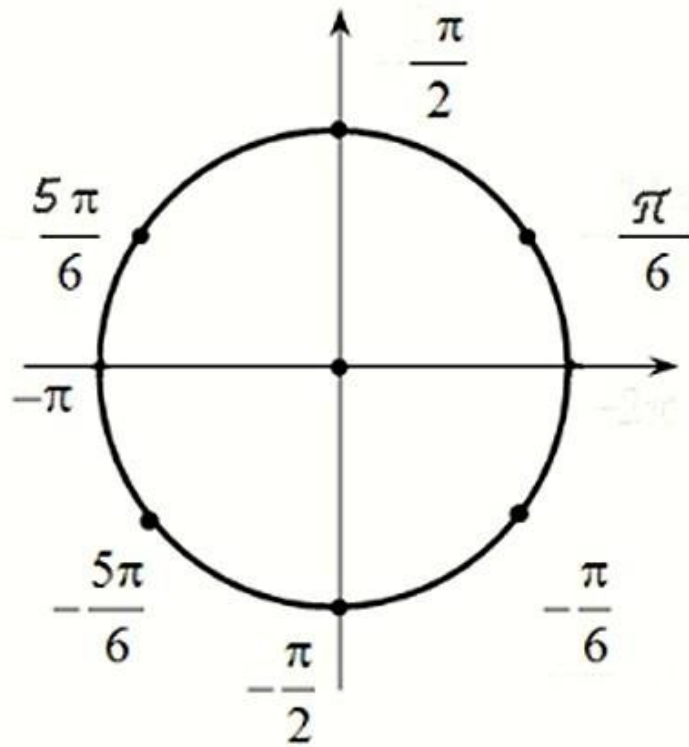
$$-\frac{3\pi}{2}; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$$

Можно было полученные корни выразить одним выражением.

Ещё раз запишем полученные корни:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Отметим их на тригонометрической окружности:



Видно, что они распределены с периодом $\pi/3$. Значит,

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Далее также решается двойное неравенство.

Ответ:

а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{11\pi}{6}; \quad -\frac{3\pi}{2}; \quad -\frac{7\pi}{6}.$

500111. Дано уравнение $\sin 2x + \sqrt{3} \sin x = 0$.

а) Решите уравнение

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

а) Вынесем общий множитель $\sin x$. Запишем:

$$2 \sin x \cos x + \sqrt{3} \sin x = 0$$

$$\sin x \cdot (2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$$

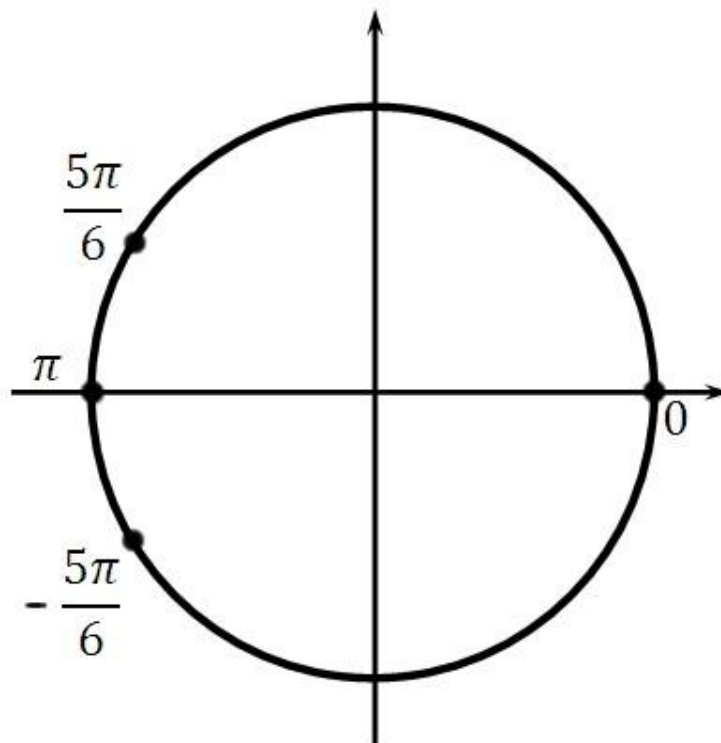
Произведение двух множителей равно нулю тогда, когда один хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом не теряет смысла.

Значит, или $\sin x = 0$, или $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Покажем их на тригонометрической окружности:



б) Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Составим двойное неравенство. Суть способа заключается в следующем:

1. Берём один из корней (полученный в пункте а).
2. Составляем двойное неравенство (искомый корень принадлежит отрезку).
3. Решаем это неравенство.
4. Находим коэффициент(ы).
5. Подставляем найденный коэффициент(ты) обратно в корень и вычисляем.

Так поступаем с каждым полученным корнем (из пункта а). Итак:

Первый корень:

$$x = \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\frac{5\pi}{2} \leq \pi n \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{5}{2} \leq n \leq \frac{7}{2}$$

$$2,5 \leq n \leq 3,5$$

Так число n целое, то $n = 3$

Находим корень, принадлежащий отрезку:

$$x = 3\pi$$

Следующий корень:

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\frac{5\pi}{2} \leq -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq \frac{7\pi}{2} \quad | + \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{7\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{20\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{26\pi}{6} \quad | \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{10}{6} \leq k \leq \frac{13}{6}$$

$$1\frac{4}{6} \leq k \leq 2\frac{1}{6}$$

Так число k целое, то $k = 2$

Находим корень, принадлежащий отрезку:

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot 2 = -\frac{5\pi}{6} + 4\pi = -\frac{5\pi}{6} + \frac{24\pi}{6} = \frac{19\pi}{6}$$

Следующий корень:

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\frac{5\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq \frac{7\pi}{2} \quad | -\frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{7\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{10\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{16\pi}{6} \quad | \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{8}{6}$$

$$\frac{5}{6} \leq k \leq 1\frac{2}{6}$$

Так число k целое, то $k = 1$.

Находим корень, принадлежащий отрезку:

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot 1 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{5\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$$

Получили три корня:

$$\frac{17\pi}{6}; 3\pi; \frac{19\pi}{6}$$

Ответ:

а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$

б) $\frac{17\pi}{6}; 3\pi; \frac{19\pi}{6}$

500131. Дано уравнение $\cos 2x + 0,5 = \cos^2 x$.

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

а) Воспользуемся формулой косинуса двойного аргумента. Запишем:

$$\cos 2x + 0,5 = \cos^2 x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 0,5 = \cos^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решим два простейших тригонометрических уравнения:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

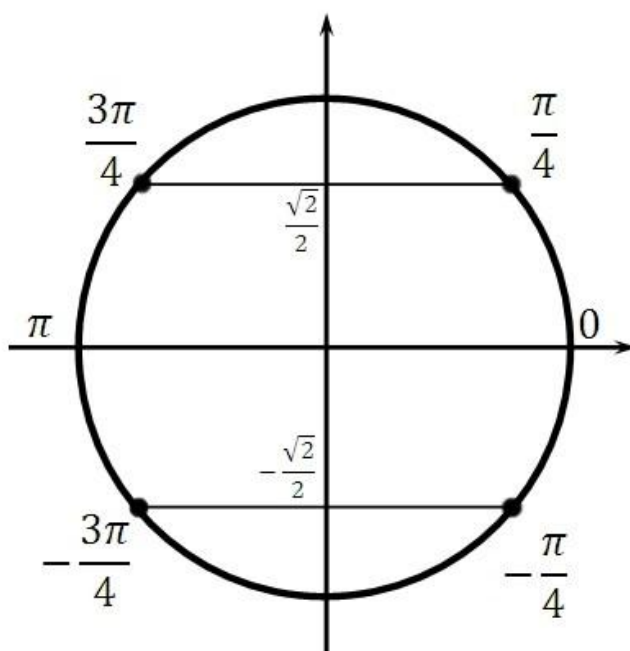
Решением $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ будут корни:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решением $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ будут корни:

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Покажем их на тригонометрической окружности:



Можем записать корни в виде:

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

б) Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Составим двойное неравенство. Суть способа заключается в следующем:

1. Берём один из корней (полученный в пункте а).
2. Составляем двойное неравенство (искомый корень принадлежит отрезку).
3. Решаем это неравенство.
4. Находим коэффициент(ы).
5. Подставляем найденный коэффициент(ты) обратно в корень и вычисляем.

Так поступаем с каждым полученным корнем (из пункта а). Итак:

Первый корень:

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$-2\pi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k \leq -\frac{\pi}{2} \quad \Bigg| -\frac{\pi}{4}$$

$$-2\pi - \frac{\pi}{4} \leq \pi k \leq -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{9\pi}{4} \leq \pi k \leq -\frac{3\pi}{4} \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$-\frac{9}{4} \leq k \leq -\frac{3}{4}$$

$$-2\frac{1}{4} \leq k \leq -\frac{3}{4}$$

$$-2,25 \leq k \leq -0,75$$

Так число k целое, то $k_1 = -2$, $k_2 = -1$

Находим корни, принадлежащие отрезку:

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi(-2) = -\frac{7\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi(-1) = -\frac{3\pi}{4}$$

Второй корень:

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$-2\pi \leq \frac{3\pi}{4} + \pi k \leq -\frac{\pi}{2} \quad \Bigg| -\frac{3\pi}{4}$$

$$-2\pi - \frac{3\pi}{4} \leq \pi k \leq -\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}$$

$$-\frac{11\pi}{4} \leq \pi k \leq -\frac{5\pi}{4} \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$-\frac{11}{4} \leq k \leq -\frac{5}{4}$$

$$-2\frac{3}{4} \leq k \leq -\frac{5}{4}$$

$$-2,75 \leq k \leq -1,25$$

Так число k целое, то $k = -2$.

Находим корень, принадлежащий отрезку:

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi(-2) = -\frac{5\pi}{4}$$

Получили три корня:

$$-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}$$

Ответ:

а) $\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

б) $-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}.$

500192. Дано уравнение

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x} = 9^{2\sin 2x}$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -2\pi]$.

а) Используем формулы степени и приведём левую и правую часть к равным основаниям:

$$81^{-\cos x} = 81^{\sin 2x}$$

Далее можем приравнять показатели:

$$-\cos x = \sin 2x$$

$$-\cos x = 2 \sin x \cos x$$

Запишем уравнение в виде: $\cos x \cdot (2\sin x + 1) = 0$

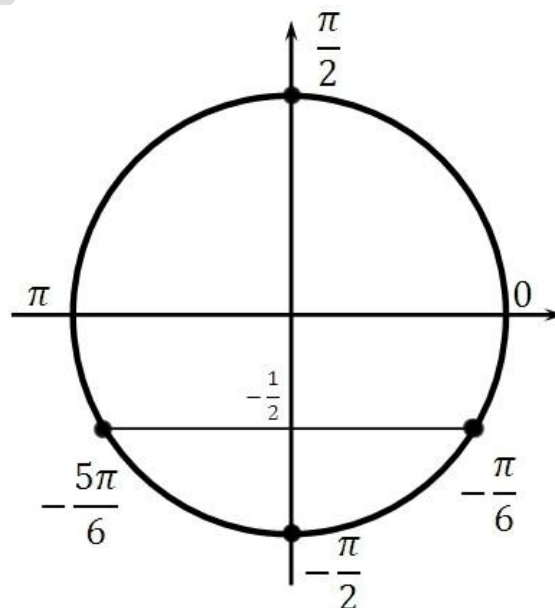
Произведение двух множителей равно нулю тогда, когда один хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом не теряет смысла.

Значит, или $\cos x = 0$, или $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Покажем полученные корни на тригонометрической окружности:



б) Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -2\pi]$.

Составим двойное неравенство. Суть способа заключается в следующем:

1. Берём один из корней (полученный в пункте а).
2. Составляем двойное неравенство (искомый корень принадлежит отрезку).
3. Решаем это неравенство.
4. Находим коэффициент(ы).
5. Подставляем найденный коэффициент(ты) обратно в корень и вычисляем.

Так поступаем с каждым полученным корнем (из пункта а).

Первый корень:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$-3\pi \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq -2\pi \quad \Bigg| -\frac{\pi}{2}$$

$$-3\pi - \frac{\pi}{2} \leq \pi n \leq -2\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{7\pi}{2} \leq \pi n \leq -\frac{5\pi}{2} \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$-\frac{7}{2} \leq n \leq -\frac{5}{2}$$

$$-3,5 \leq n \leq -2,5$$

Так число n целое, то $n = -3$.

Находим корень, принадлежащий отрезку:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi(-3) = -\frac{5\pi}{2}$$

Второй корень:

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$-3\pi \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq -2\pi \quad \Big| +\frac{\pi}{6}$$

$$-3\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi k \leq -2\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{17\pi}{6} \leq 2\pi k \leq -\frac{11\pi}{6} \quad \Big| \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$-\frac{17}{12} \leq k \leq -\frac{11}{12}$$

$$-1\frac{5}{12} \leq k \leq -\frac{11}{12}$$

Так число k целое, то $k = -1$.

Находим корень, принадлежащий отрезку:

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi(-1) = -\frac{13\pi}{6}$$

Третий корень:

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$-3\pi \leq -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq -2\pi \quad \Big| +\frac{5\pi}{6}$$

$$-3\pi + \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi k \leq -2\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$-\frac{13\pi}{6} \leq 2\pi k \leq -\frac{7\pi}{6} \quad \Big| \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$-\frac{13}{12} \leq k \leq -\frac{7}{12}$$

$$-1\frac{1}{12} \leq k \leq -\frac{7}{12}$$

Так число k целое, то $k = -1$.

Находим корень, принадлежащий отрезку:

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi(-1) = -\frac{17\pi}{6}$$

Получили три корня:

$$-\frac{17\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}$$

Ответ:

а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

б) $-\frac{17\pi}{6}, \quad -\frac{5\pi}{6}$ и $-\frac{13\pi}{6}$

500212. Дано уравнение $6\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0$.

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

а) Выразим квадрат синуса из основной тригонометрической формулы, кроме этого используем формулу приведения для синуса:

$$6(1 - \cos^2 x) + 5\cos x - 2 = 0$$

$$6 - 6\cos^2 x + 5\cos x - 2 = 0$$

$$-6\cos^2 x + 5\cos x + 4 = 0$$

$$6\cos^2 x - 5\cos x - 4 = 0$$

После замены переменной и решения квадратного уравнения получим:

$$\cos x = \frac{4}{3} \quad \text{или} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

При $\cos x = \frac{4}{3}$ уравнение не имеет корней, так значения косинуса лежат в пределах от -1 до 1 .

Решая $\cos x = -\frac{1}{2}$, получим $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

б) Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

Составим двойное неравенство. Суть способа заключается в следующем:

1. Берём один из корней (полученный в пункте а).
2. Составляем двойное неравенство (искомый корень принадлежит отрезку).
3. Решаем это неравенство.
4. Находим коэффициент(ы).
5. Подставляем найденный коэффициент(ты) обратно в корень и вычисляем.

Так поступаем с каждым полученным корнем (из пункта а).

Первый корень:

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\begin{aligned} -5\pi &\leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq -\frac{7\pi}{2} & \Big| -\frac{2\pi}{3} \\ -5\pi - \frac{2\pi}{3} &\leq 2\pi n \leq -\frac{7\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \\ -\frac{17\pi}{3} &\leq 2\pi n \leq -\frac{27\pi}{6} & \Big| \cdot \frac{1}{2\pi} \\ -\frac{17\pi}{6} &\leq n \leq -\frac{27\pi}{12} \\ -2\frac{5}{6} &\leq n \leq -2\frac{5}{12} \end{aligned}$$

Так число n целое, то для данного неравенства такого n не существует.

Второй корень:

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$-5\pi \leq -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq -\frac{7\pi}{2} \quad \Big| +\frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{aligned}
 -5\pi + \frac{2\pi}{3} &\leq 2\pi n \leq -\frac{7\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \\
 -\frac{13\pi}{3} &\leq 2\pi n \leq -\frac{17\pi}{6} \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{2\pi} \\
 -\frac{13\pi}{6} &\leq n \leq -\frac{17\pi}{12} \\
 -2\frac{1}{6} &\leq n \leq -1\frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

Так число n целое, то $n = -2$.

Находим корень, принадлежащий отрезку:

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi(-2) = -\frac{14\pi}{3}$$

Ответ: а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{14\pi}{3}$

500346. Дано уравнение

$$4\sin^3 x = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$.

а) Используем формулу приведения для косинуса:

$$\begin{aligned}
 4\sin^3 x &= 3 \sin x \\
 4\sin^3 x - 3 \sin x &= 0 \\
 \sin x (4\sin^2 x - 3) &= 0
 \end{aligned}$$

Произведение двух множителей равно нулю тогда, когда один хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом не теряет смысла.

Значит, или $\sin x = 0$, или $4\sin^2 x - 3 = 0$.

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Если $4\sin^2 x - 3 = 0$, то $\sin^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решением $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ являются корни:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{либо} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

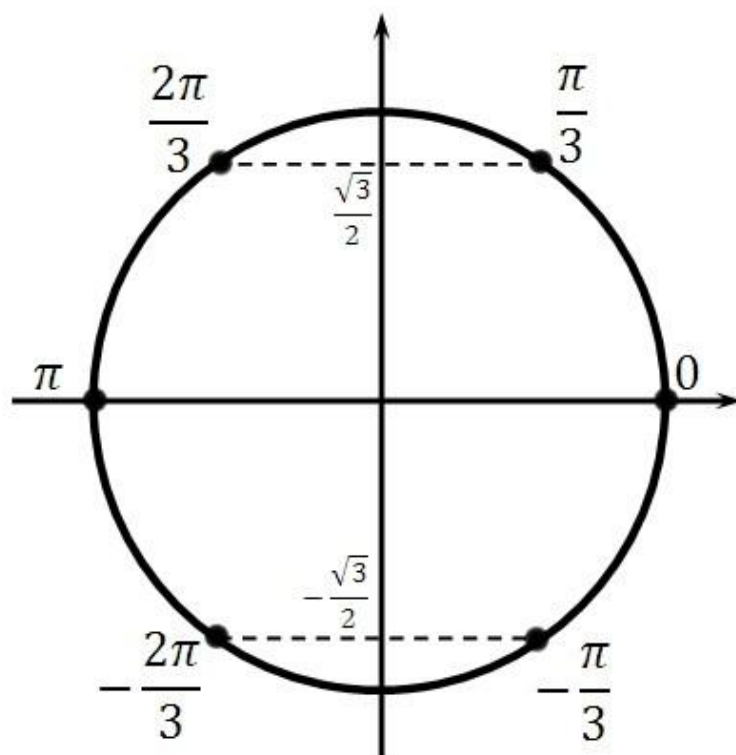
Решением $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ являются корни:

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{либо} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Можем записать:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k \quad \text{либо} \quad x = \frac{2\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Покажем полученные корни на тригонометрической окружности:



б) Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Составим двойное неравенство. Суть способа заключается в следующем:

1. Берём один из корней (полученный в пункте а).
2. Составляем двойное неравенство (искомый корень принадлежит отрезку).

3. Решаем это неравенство.

4. Находим коэффициент(ы).

5. Подставляем найденный коэффициент(ты) обратно в корень и вычисляем.

Так поступаем с каждым полученным корнем (из пункта а).

Первый корень:

$$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\frac{7\pi}{2} \leq \pi n \leq \frac{9\pi}{2} \quad \left| \cdot \frac{1}{\pi} \right.$$

$$\frac{7}{2} \leq n \leq \frac{9}{2}$$

$$3,5 \leq n \leq 4,5$$

Так число n целое, то $n = 4$.

Находим корень, принадлежащий отрезку:

$$x = 4\pi$$

Второй корень:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\frac{7\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} + \pi k \leq \frac{9\pi}{2} \quad \left| -\frac{\pi}{3} \right.$$

$$\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \leq \pi k \leq \frac{9\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{19\pi}{6} \leq \pi k \leq \frac{25\pi}{6} \quad \left| \cdot \frac{1}{\pi} \right.$$

$$\frac{19}{6} \leq k \leq \frac{25}{6}$$

$$3\frac{1}{6} \leq k \leq 4\frac{1}{6}$$

Так число k целое, то $k = 4$.

Находим корень, принадлежащий отрезку:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi \cdot 4 = \frac{13\pi}{3}$$

Следующий корень:

$$x = \frac{2\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\frac{7\pi}{2} \leq \frac{2\pi}{3} + \pi k \leq \frac{9\pi}{2} \quad \left| -\frac{2\pi}{3} \right.$$

$$\frac{7\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \leq \pi k \leq \frac{9\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{17\pi}{6} \leq \pi k \leq \frac{23\pi}{6} \quad \left| \cdot \frac{1}{\pi} \right.$$

$$\frac{17}{6} \leq k \leq \frac{23}{6}$$

$$2\frac{5}{6} \leq k \leq 3\frac{5}{6}$$

Так число k целое, то $k = 3$.

Находим корень, принадлежащий отрезку:

$$x = \frac{2\pi}{3} + \pi \cdot 3 = \frac{11\pi}{3}$$

Получим числа:

$$\frac{11\pi}{3}; \quad 4\pi; \quad \frac{13\pi}{3}$$

*Можно было записать полученные корни в виде:

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

так как видно, что они распределены по окружности с периодом $\pi/3$.

Ответ:

$$\text{а) } \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad \frac{2\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \text{б) } \frac{11\pi}{3}, 4\pi, \frac{13\pi}{3}$$

500366. Дано уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0,5$

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

а) Используем формулу косинуса двойного аргумента и запишем:

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = 0,5$$

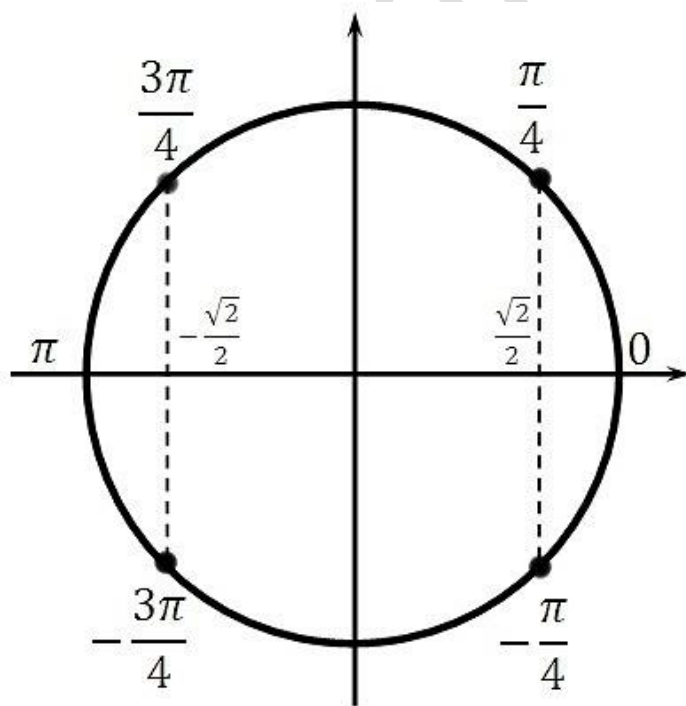
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{либо} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решением уравнений являются корни:

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Покажем их:



Можем записать в виде:

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Также решение можно записать в виде:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

так как видно, что корни распределены по окружности с периодом $\pi/2$

б) Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Составим двойное неравенство. Суть способа заключается в следующем:

1. Берём один из корней (полученный в пункте а).
2. Составляем двойное неравенство (искомый корень принадлежит отрезку).
3. Решаем это неравенство.
4. Находим коэффициент(ы).
5. Подставляем найденный коэффициент(ты) обратно в корень и вычисляем.

Так поступаем с каждым полученным корнем (из пункта а).

Рассмотрим корень:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\begin{aligned} -\frac{7\pi}{2} &\leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \leq -2\pi && \left| -\frac{\pi}{4} \right. \\ -\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{4} &\leq \frac{\pi}{2}k \leq -2\pi - \frac{\pi}{4} \\ -\frac{15\pi}{4} &\leq \frac{\pi}{2}k \leq -\frac{9\pi}{4} && \left| \cdot \frac{2}{\pi} \right. \\ &-7,5 \leq k \leq -4,5 \end{aligned}$$

Так число k целое, то $k_1 = -7$, $k_2 = -6$, $k_3 = -5$

Находим корни, принадлежащие отрезку:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(-7) = -\frac{13\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(-6) = -\frac{11\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(-5) = -\frac{9\pi}{4}$$

Получили числа:

$$-\frac{13\pi}{4}; \quad -\frac{11\pi}{4}; \quad -\frac{9\pi}{4}$$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{13\pi}{4}; -\frac{11\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}$.

500386. Дано уравнение

$$4\cos^2 x + 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

а) Выразим квадрат косинуса по основному тригонометрическому тождеству, также используем формулу приведения для косинуса:

$$4(1 - \sin^2 x) - 4\sin x - 1 = 0$$

$$4 - 4\sin^2 x - 4\sin x - 1 = 0$$

$$4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$$

Решив квадратное уравнение используя метод замены переменной получим:

$$\sin x = -\frac{3}{2} \quad \text{либо} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

Мы знаем, что значения синуса лежат в пределах от -1 до 1 . Поэтому решением уравнения является:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

Решая это простейшее тригонометрическое уравнение получим:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

б) Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Составим двойное неравенство.

Суть способа заключается в следующем:

1. Берём один из корней (полученный в пункте а).
2. Составляем двойное неравенство (искомый корень принадлежит отрезку).
3. Решаем это неравенство.
4. Находим коэффициент(ы).

5. Подставляем найденный коэффициент(ты) обратно в корень и вычисляем.

Так поступаем с каждым полученным корнем (из пункта а).

Первый корень:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq \frac{5\pi}{2} \quad \Big| -\frac{\pi}{6}$$

$$\pi - \frac{\pi}{6} \leq 2\pi n \leq \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{6} \leq 2\pi n \leq \frac{14\pi}{6} \quad \Big| \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{5}{12} \leq n \leq \frac{14}{12}$$

$$\frac{5}{12} \leq n \leq 1\frac{2}{12}$$

Так число n целое, то $n = 1$.

Находим корень, принадлежащий отрезку:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 1 = \frac{13\pi}{6}$$

Второй корень:

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\pi \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq \frac{5\pi}{2} \quad \Big| -\frac{5\pi}{6}$$

$$\pi - \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi n \leq \frac{5\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq 2\pi n \leq \frac{10\pi}{6} \quad \Big| \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{1}{12} \leq n \leq \frac{10}{12}$$

Так число n целое, то такого n в данном промежутке не существует.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.

500407. Дано уравнение $2\cos^3 x - 2\cos x + \sin^2 x = 0$.

а) Решите уравнение

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

а) Необходимо представить левую часть уравнения в виде произведения. Для первых двух слагаемых вынесем за скобку общий множитель $2 \cos x$:

$$2 \cos x (\cos^2 x - 1) + \sin^2 x = 0$$

$$2 \cos x (-\sin^2 x) + \sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x - 2 \cos x \sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x (1 - 2 \cos x) = 0$$

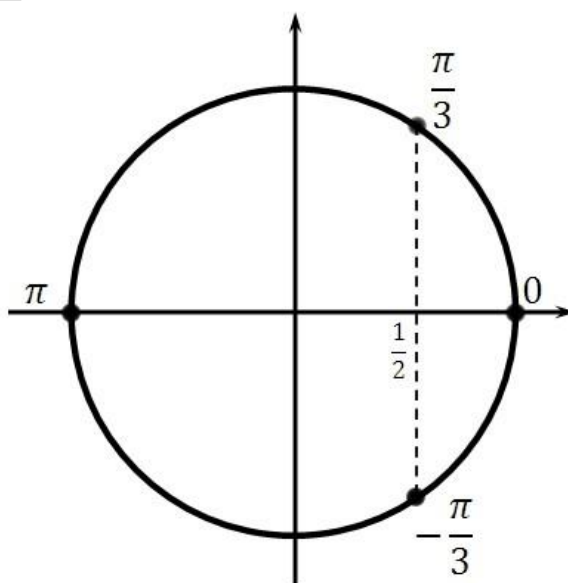
Произведение двух множителей равно нулю тогда, когда один хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом не теряет смысла.

Значит $\sin^2 x = 0$ или $1 - 2 \cos x = 0$.

Если $\sin^2 x = 0$, то $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Если $1 - 2 \cos x = 0$, то $\cos x = \frac{1}{2}$ и

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Покажем их на тригонометрической окружности:



б) Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $[1,5\pi; 3\pi]$.

Составим двойное неравенство.

Суть способа заключается в следующем:

1. Берём один из корней (полученный в пункте а).
2. Составляем двойное неравенство (искомый корень принадлежит отрезку).
3. Решаем это неравенство.
4. Находим коэффициент(ы).
5. Подставляем найденный коэффициент(ты) обратно в корень и вычисляем.

Так поступаем с каждым полученным корнем (из пункта а).

Первый корень:

$$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$1,5\pi \leq \pi n \leq 3\pi$$

$$1,5\pi \leq \pi n \leq 3\pi \quad \left| \cdot \frac{1}{\pi} \right.$$

$$1,5 \leq n \leq 3$$

Так число n целое, то $n_1 = 2$, $n_2 = 3$.

Находим корни, принадлежащие отрезку:

$$x = \pi \cdot 2 = 2\pi$$

$$x = \pi \cdot 3 = 3\pi$$

Второй корень:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$1,5\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq 3\pi \quad \left| -\frac{\pi}{3} \right.$$

$$1,5\pi - \frac{\pi}{3} \leq 2\pi k \leq 3\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{7\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{8\pi}{3} \quad \left| \cdot \frac{1}{2\pi} \right.$$

$$\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{8}{6}$$

$$\frac{7}{12} \leq k \leq 1\frac{2}{6}$$

Так число k целое, то $k = 1$.

Находим корень, принадлежащий отрезку:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 1 = \frac{7\pi}{3}$$

Следующий корень:

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$1,5\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq 3\pi \quad \left| +\frac{\pi}{3} \right.$$

$$1,5\pi + \frac{\pi}{3} \leq 2\pi k \leq 3\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{11\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{10\pi}{3} \quad \left| \cdot \frac{1}{2\pi} \right.$$

$$\frac{11}{12} \leq k \leq \frac{10}{6}$$

$$\frac{11}{12} \leq k \leq 1\frac{4}{6}$$

Так число k целое, то $k = 1$.

Находим корень, принадлежащий отрезку:

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 1 = \frac{5\pi}{3}$$

Получили числа:

$$\frac{5\pi}{3}; 2\pi; \frac{7\pi}{3}; 3\pi$$

Ответ:

а) $\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

б) $\frac{5\pi}{3}, 2\pi, \frac{7\pi}{3}, 3\pi.$

500427. Дано уравнение $\sqrt{2}\cos^3 x - \sqrt{2}\cos x + \sin^2 x = 0$.

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

а) Необходимо представить левую часть уравнения в виде произведения. Для первых двух слагаемых вынесем за скобку общий множитель $\sqrt{2}\cos x$:

$$\sqrt{2}\cos x (\cos^2 x - 1) + \sin^2 x = 0$$

$$\sqrt{2}\cos x (-\sin^2 x) + \sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x - \sqrt{2}\cos x \sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x (1 - \sqrt{2}\cos x) = 0$$

Произведение двух множителей равно нулю тогда, когда один хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом не теряет смысла.

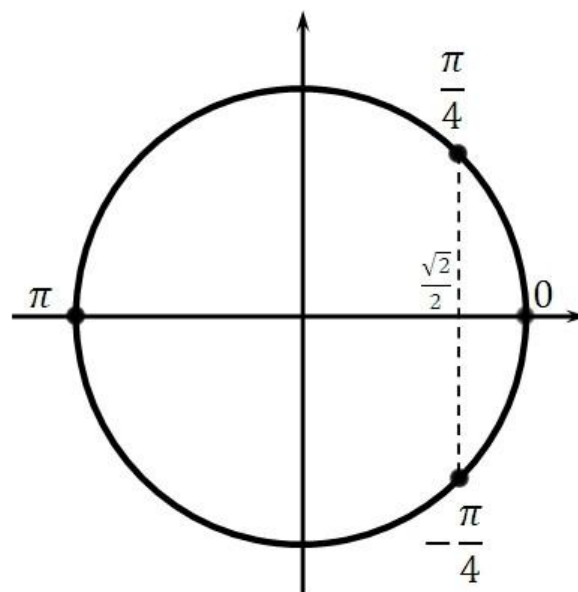
Значит, $\sin^2 x = 0$ или $1 - \sqrt{2}\cos x = 0$.

Если $\sin^2 x = 0$, то $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если $1 - 2\cos x = 0$, то $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Покажем их на тригонометрической окружности:



б) Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $[2,5\pi; 4\pi]$.

Составим двойное неравенство.

Суть способа заключается в следующем:

1. Берём один из корней (полученный в пункте а).
2. Составляем двойное неравенство (искомый корень принадлежит отрезку).
3. Решаем это неравенство.
4. Находим коэффициент(ы).
5. Подставляем найденный коэффициент(ты) обратно в корень и вычисляем.

Так поступаем с каждым полученным корнем (из пункта а).

Первый корень:

$$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$2,5\pi \leq \pi n \leq 4\pi$$

$$2,5\pi \leq \pi n \leq 4\pi \quad \left| \cdot \frac{1}{\pi} \right.$$

$$2,5 \leq n \leq 4$$

Так число n целое, то $n_1 = 3$, $n_2 = 4$.

Находим корни, принадлежащие отрезку:

$$x = \pi \cdot 3 = 3\pi$$

$$x = \pi \cdot 4 = 4\pi$$

Второй корень:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$2,5\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq 4\pi \quad \left| -\frac{\pi}{4} \right.$$

$$2,5\pi - \frac{\pi}{4} \leq 2\pi k \leq 4\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{9\pi}{4} \leq 2\pi k \leq \frac{15\pi}{4} \quad \left| \cdot \frac{1}{2\pi} \right.$$

$$\frac{9}{8} \leq k \leq \frac{15}{8}$$

$$1\frac{1}{8} \leq k \leq 1\frac{7}{8}$$

Так число k целое, то в данном промежутке такого значения не существует.

Следующий корень:

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$2,5\pi \leq -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq 4\pi \quad \left| +\frac{\pi}{4} \right.$$

$$2,5\pi + \frac{\pi}{4} \leq 2\pi k \leq 4\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{11\pi}{4} \leq 2\pi k \leq \frac{17\pi}{4} \quad \left| \cdot \frac{1}{2\pi} \right.$$

$$\frac{11}{8} \leq k \leq \frac{17}{8}$$

$$1\frac{3}{8} \leq k \leq 2\frac{1}{8}$$

Так число k целое, то $k = 2$.

Найдём корень принадлежащий отрезку:

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 2 = \frac{15\pi}{4}$$

Получили числа:

$$3\pi; \quad \frac{15\pi}{4}; \quad 4\pi$$

Ответ:

а) $\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

б) $3\pi, \quad \frac{15\pi}{4}, \quad 4\pi .$

500473. Дано уравнение

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{\sin x} = 7^{2\sin 2x}$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

а) Используем формулы степени и приведём левую и правую часть к равным основаниям: $49^{-\sin x} = 49^{\sin 2x}$

Далее можем приравнять показатели:

$$-\sin x = \sin 2x$$

$$-\sin x = 2 \sin x \cos x$$

Запишем уравнение в виде: $\sin x \cdot (2 \cos x + 1) = 0$

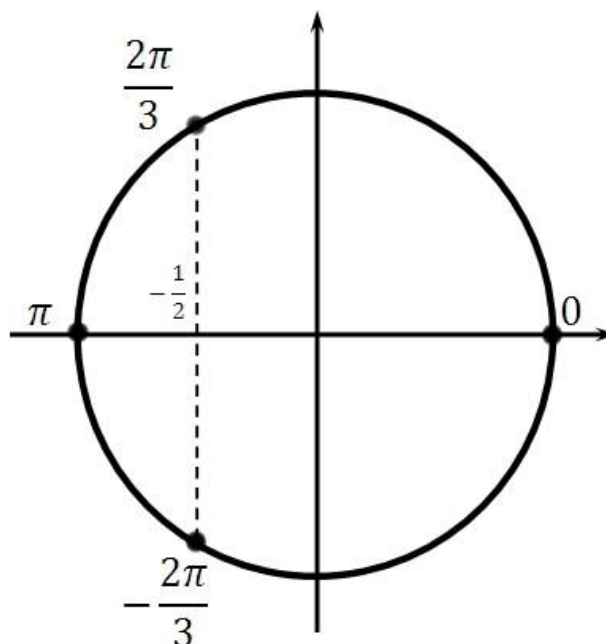
Произведение двух множителей равно нулю тогда, когда один хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом не теряет смысла.

Значит, или $\sin x = 0$, или $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если $\cos x = -\frac{1}{2}$, то $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Покажем полученные корни на тригонометрической окружности:



б) Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Составим двойное неравенство.

Суть способа заключается в следующем:

1. Берём один из корней (полученный в пункте а).
2. Составляем двойное неравенство (искомый корень принадлежит отрезку).
3. Решаем это неравенство.
4. Находим коэффициент(ы).
5. Подставляем найденный коэффициент(ты) обратно в корень и вычисляем.

Так поступаем с каждым полученным корнем (из пункта а).

Первый корень:

$$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$1,5\pi \leq \pi n \leq 3\pi$$

$$1,5\pi \leq \pi n \leq 3\pi \quad \left| \cdot \frac{1}{\pi} \right.$$

$$1,5 \leq n \leq 3$$

Так число n целое, то $n_1 = 2$, $n_2 = 3$.

Находим корни, принадлежащие отрезку:

$$x = \pi \cdot 2 = 2\pi$$

$$x = \pi \cdot 3 = 3\pi$$

Следующий корень:

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$1,5\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq 3 \quad \left| -\frac{2\pi}{3} \right.$$

$$1,5\pi - \frac{2\pi}{3} \leq 2\pi k \leq 3 - \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{5\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{7\pi}{3} \quad \left| \cdot \frac{1}{2\pi} \right.$$

$$\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{7}{6}$$

$$\frac{5}{12} \leq k \leq 1\frac{1}{6}$$

Так как число k целое, то $k = 1$.

Найдём корень принадлежащий отрезку:

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 1 = \frac{8\pi}{3}$$

Следующий корень:

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$1,5\pi \leq -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq 3 \quad \left| +\frac{2\pi}{3} \right.$$

$$1,5\pi + \frac{2\pi}{3} \leq 2\pi k \leq 3 + \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{13\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{11\pi}{3} \quad \left| \cdot \frac{1}{2\pi} \right.$$

$$\frac{13}{12} \leq k \leq \frac{11}{6}$$

$$1\frac{1}{12} \leq k \leq 1\frac{5}{6}$$

Так как число k целое, то в данном промежутке такого значения нет.

Получили числа:

$$2\pi; \quad \frac{8\pi}{3}; \quad 3\pi$$

Ответ:

а) $\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

б) $2\pi, \quad \frac{8\pi}{3}$ и 3π .

500587. Дано уравнение

$$\cos 2x - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -0,25$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

а) Используем формулу косинуса двойного аргумента и формулу приведения для синуса:

$$\cos 2x - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -0,25 \Leftrightarrow$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = -0,25$$

$$-\sin^2 x = -0,25$$

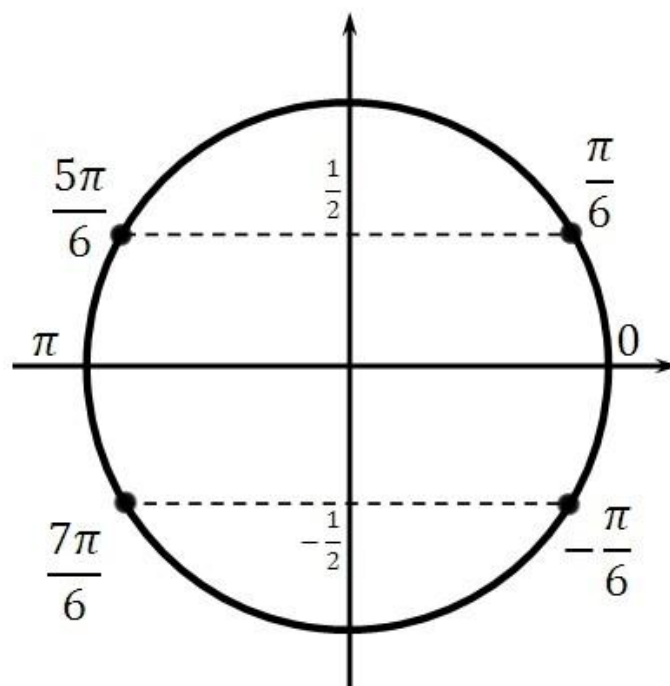
$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \sin x = -\frac{1}{2}$$

Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Покажем их на тригонометрической окружности:



Таким образом, корни можем записать в виде:

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

б) Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Составим двойное неравенство.

Суть способа заключается в следующем:

1. Берём один из корней (полученный в пункте а).
2. Составляем двойное неравенство (искомый корень принадлежит отрезку).
3. Решаем это неравенство.
4. Находим коэффициент(ы).
5. Подставляем найденный коэффициент(ты) обратно в корень и вычисляем.

Так поступаем с каждым полученным корнем (из пункта а).

Первый корень:

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\pi \leq \frac{\pi}{6} + \pi k \leq \frac{5\pi}{2} \quad \left| -\frac{\pi}{6} \right.$$

$$\pi - \frac{\pi}{6} \leq \pi k \leq \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{6} \leq \pi k \leq \frac{14\pi}{6} \quad \left| \cdot \frac{1}{\pi} \right.$$

$$\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{14}{6}$$

$$\frac{5}{6} \leq k \leq 2\frac{2}{6}$$

Так как число k целое, то $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.

Найдём корни принадлежащие отрезку:

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 1 = \frac{7\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 2 = \frac{13\pi}{6}$$

Следующий корень:

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\pi \leq -\frac{\pi}{6} + \pi k \leq \frac{5\pi}{2} \quad \left| +\frac{\pi}{6} \right.$$

$$\pi + \frac{\pi}{6} \leq \pi k \leq \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{7\pi}{6} \leq \pi k \leq \frac{16\pi}{6} \quad \left| \cdot \frac{1}{\pi} \right.$$

$$\frac{7}{6} \leq k \leq \frac{16}{6}$$

$$1\frac{5}{6} \leq k \leq 2\frac{4}{6}$$

Так как число k целое, то $k = 2$.

Найдём корень принадлежащий отрезку:

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi \cdot 2 = \frac{11\pi}{6}$$

Получили числа:

$$\frac{7\pi}{6}; \quad \frac{11\pi}{6}; \quad \frac{13\pi}{6}$$

Ответ:

а) $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

б) $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}.$

500592. Дано уравнение $\cos 2x + 3\sin^2 x = 1,25$

а) Решите уравнение.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right].$

а) Воспользуемся формулой косинуса двойного аргумента:

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 3\sin^2 x = 1,25$$

$$\cos^2 x + 2\sin^2 x = 1,25$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x + \sin^2 x = 1,25$$

$$1 + \sin^2 x = 1,25$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \sin x = -\frac{1}{2}$$

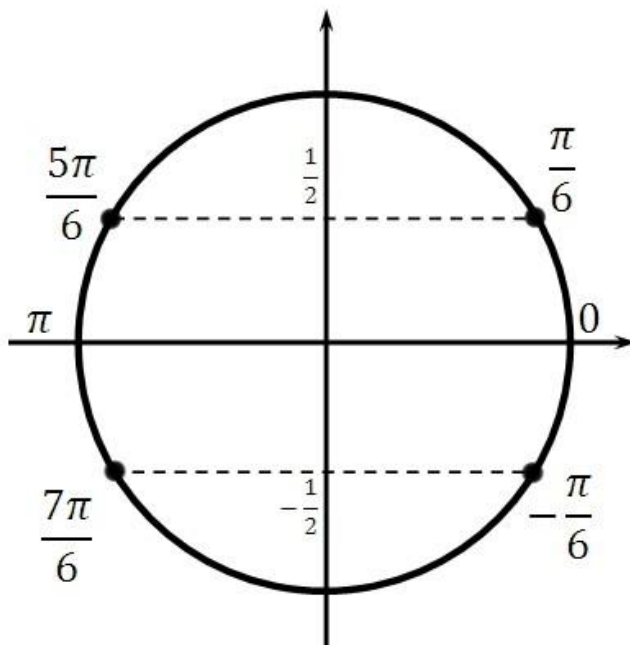
Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{или} \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Покажем их на тригонометрической окружности:



Таким образом,

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Или можно записать корни следующим образом:

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

б) Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Составим двойное неравенство.

Суть способа заключается в следующем:

1. Берём один из корней (полученный в пункте а).
2. Составляем двойное неравенство (искомый корень принадлежит отрезку).
3. Решаем это неравенство.
4. Находим коэффициент(ы).
5. Подставляем найденный коэффициент(ты) обратно в корень и вычисляем.

Так поступаем с каждым полученным корнем (из пункта а).

Первый корень:

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\pi \leq \frac{\pi}{6} + \pi k \leq \frac{5\pi}{2} \quad \left| -\frac{\pi}{6} \right.$$

$$\pi - \frac{\pi}{6} \leq \pi k \leq \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{6} \leq \pi k \leq \frac{14\pi}{6} \quad \left| \cdot \frac{1}{\pi} \right.$$

$$\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{14}{6}$$

$$\frac{5}{6} \leq k \leq 2\frac{2}{6}$$

Так как число k целое, то $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.

Найдём корни принадлежащие отрезку:

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 1 = \frac{7\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 2 = \frac{13\pi}{6}$$

Следующий корень:

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\pi \leq -\frac{\pi}{6} + \pi k \leq \frac{5\pi}{2} \quad \left| +\frac{\pi}{6} \right.$$

$$\pi + \frac{\pi}{6} \leq \pi k \leq \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{7\pi}{6} \leq \pi k \leq \frac{16\pi}{6} \quad \left| \cdot \frac{1}{\pi} \right.$$

$$\frac{7}{6} \leq k \leq \frac{16}{6}$$

$$1\frac{5}{6} \leq k \leq 2\frac{4}{6}$$

Так как число k целое, то $k = 2$.

Найдём корень принадлежащий отрезку:

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi \cdot 2 = \frac{11\pi}{6}$$

Получили числа:

$$\frac{7\pi}{6}; \quad \frac{11\pi}{6}; \quad \frac{13\pi}{6}$$

Ответ:

$$\text{а) } x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{б) } \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}.$$

Многие, которым никогда не представлялось случая более узнать математику, смешивают ее с арифметикой и считают ее наукой сухой. В сущности же эта наука, требующая наиболее фантазии, и один из первых математиков нашего века говорит совершенно верно, что нельзя быть математиком, не будучи в то же время поэтом в душе.

С. КОВАЛЕВСКАЯ

[СТИХИ АВТОРА](http://matematikalegko.ru)